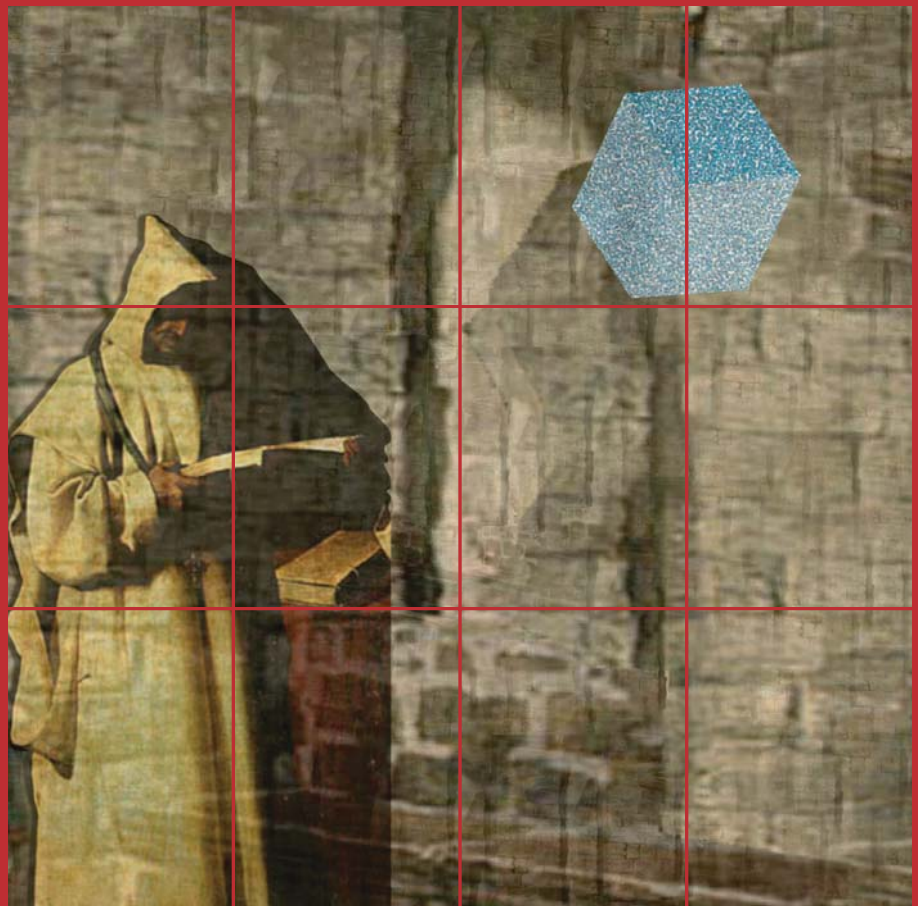


# GRAVITACIÓN

Dra. Susana Landau  
Dr. Claudio Simeone



Colección: LAS CIENCIAS NATURALES Y LA MATEMÁTICA

---

Colección: LAS CIENCIAS NATURALES Y LA MATEMÁTICA

# GRAVITACIÓN

Dra. Susana Landau  
Dr. Claudio Simeone

## ADVERTENCIA

La habilitación de las direcciones electrónicas y dominios de la web asociados, citados en este libro, debe ser considerada vigente para su acceso, a la fecha de edición de la presente publicación. Los eventuales cambios, en razón de la caducidad, transferencia de dominio, modificaciones y/o alteraciones de contenidos y su uso para otros propósitos, queda fuera de las previsiones de la presente edición -Por lo tanto, las direcciones electrónicas mencionadas en este libro, deben ser descartadas o consideradas, en este contexto-.

---

Distribución de carácter gratuito.

---

a u t o r i d a d e s

PRESIDENTE DE LA NACIÓN

**Dra. Cristina Fernández de Kirchner**

MINISTRO DE EDUCACIÓN

**Dr. Alberto E. Sileoni**

SECRETARIA DE EDUCACIÓN

**Prof. María Inés Abrile de Vollmer**

DIRECTORA EJECUTIVA DEL INSTITUTO NACIONAL DE  
EDUCACIÓN TECNOLÓGICA

**Lic. María Rosa Almandoz**

DIRECTOR NACIONAL DEL CENTRO NACIONAL DE  
EDUCACIÓN TECNOLÓGICA

**Lic. Juan Manuel Kirschenbaum**

DIRECTOR NACIONAL DE EDUCACIÓN TÉCNICO PROFESIONAL Y  
OCUPACIONAL

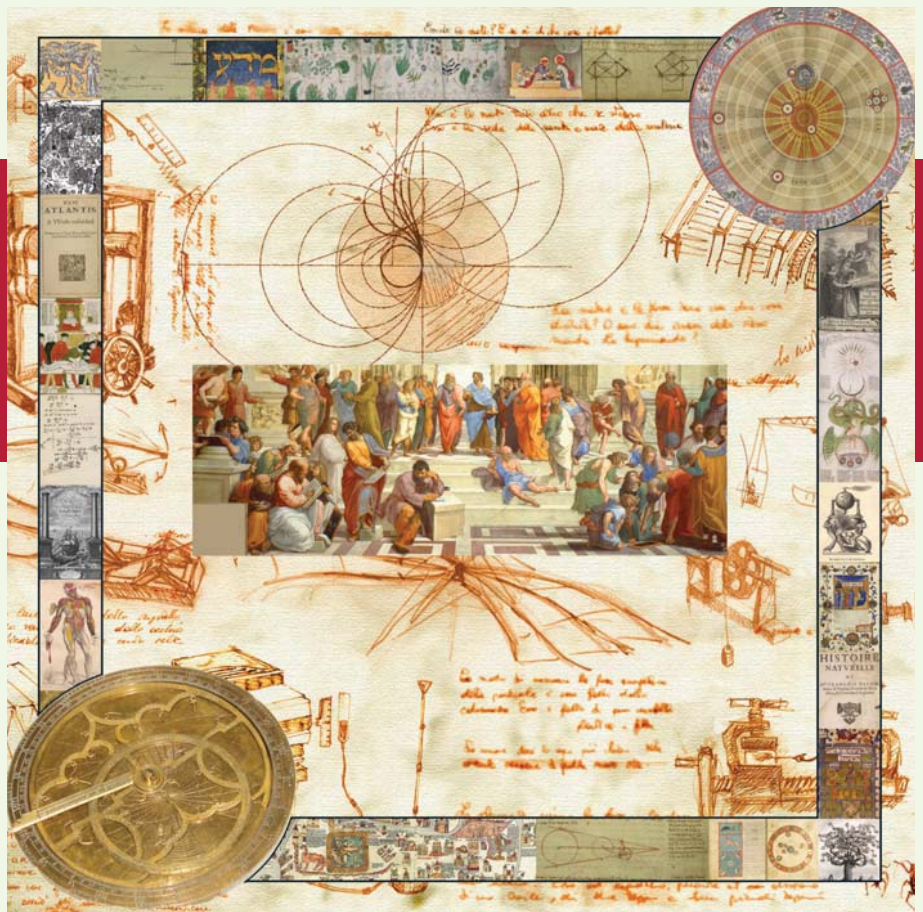
**Ing. Roberto Díaz**

Ministerio de Educación.  
Instituto Nacional de Educación Tecnológica.  
Saavedra 789. C1229ACE.  
Ciudad Autónoma de Buenos Aires.  
República Argentina.  
2009

---

# GRAVITACIÓN

Dra. Susana Landau  
Dr. Claudio Simeone



Colección: LAS CIENCIAS NATURALES Y LA MATEMÁTICA

Colección “Las Ciencias Naturales y la Matemática”.  
Director de la Colección: Juan Manuel Kirschenbaum  
Coordinadora general de la Colección: Haydeé Noceti.

Queda hecho el depósito que previene la ley N° 11.723. © Todos los derechos reservados por el Ministerio de Educación - Instituto Nacional de Educación Tecnológica.

La reproducción total o parcial, en forma idéntica o modificada por cualquier medio mecánico o electrónico incluyendo fotocopia, grabación o cualquier sistema de almacenamiento y recuperación de información no autorizada en forma expresa por el editor, viola derechos reservados.

Industria Argentina

ISBN 978-950-00-0722-1

**Director de la Colección:**  
Lic. Juan Manuel Kirschenbaum

**Coordinadora general y académica  
de la Colección:**

Prof. Ing. Haydeé Noceti

**Diseño didáctico y corrección de estilo:**

Lic. María Inés Narvaja  
Ing. Alejandra Santos

**Coordinación y producción gráfica:**  
Tomás Ahumada

**Diseño gráfico:**  
Martin Alejandro Gonzalez

**Ilustraciones:**  
Martin Alejandro Gonzalez

**Retoques fotográficos:**  
Roberto Sobrado

**Diseño de tapa:**  
Tomás Ahumada

**Administración:**  
Cristina Caratozzolo  
Néstor Hergenrether

Nuestro agradecimiento al personal  
del Centro Nacional de Educación  
Tecnológica por su colaboración.

Landau, Susana  
Gravitación / Susana Landau y Claudio Simeone; dirigido por Juan  
Manuel Kirschenbaum.  
- 1a ed. - Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación. Instituto  
Nacional de Educación Tecnológica, 2009.  
136 p.: il.; 24x19 cm. (Las ciencias naturales y la matemática / Juan  
Manuel Kirschenbaum.)

ISBN 978-950-00-0722-1

1. Física.  
2. Enseñanza Secundaria.  
I. Simeone, Claudio  
II. Kirschenbaum, Juan Manuel, dir.  
III. Título

CDD 530.712

Fecha de catalogación: 27/08/2009

Impreso en Artes Gráficas Rioplatense S. A., Corrales 1393 (C1437GLE),  
Buenos Aires, Argentina.

Tirada de esta edición: 100.000 ejemplares

---

## *Los Autores*



### ***Dra. Susana Landau***

Nació en 1971 en la Ciudad de Buenos Aires. En 1998 se recibió de Licenciada en Ciencias Físicas en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires. Realizó sus estudios de posgrado en la Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas de la Universidad de La Plata donde obtuvo en el 2002 el título de Doctora en Astronomía. Sus temas de interés siempre estuvieron ligados al origen y evolución del universo. En la actualidad se desempeña como Investigadora Adjunta del CONICET en el Departamento de Física de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UBA. Realiza investigaciones destinadas a profundizar el conocimiento sobre el origen y la evolución del universo, mediante el estudio de la Radiación Cósmica de Fondo y otros datos astronómicos.



### ***Dr. Claudio Simeone***

Es licenciado y doctor en física de la UBA, y se desempeña como investigador adjunto del CONICET y profesor de la UBA. Trabajó en el Laboratorio TANDAR de la CNEA y en el Instituto de Astronomía y Física del Espacio, y actualmente es investigador en el Departamento de Física de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UBA. Ha publicado un libro y numerosos artículos sobre cosmología cuántica, agujeros de gusano, teoría de cuerdas, teoría de campos en espacio curvo y análisis estadístico de datos astronómicos.

---

<b>Prefacio</b>	8
<b>Capítulo 1</b>	
<b>Introducción histórica</b>	10
• 1.1. Descripción del movimiento en la antigüedad	10
• 1.2. El movimiento de los cuerpos celestes para los astrónomos modernos	14
• 1.3. El movimiento sobre la Tierra a partir de Galileo	18
• 1.4. Unificación de las leyes del movimiento	20
• 1.5. La teoría de la Relatividad	21
<b>Capítulo 2</b>	
<b>Leyes de la dinámica y leyes de conservación</b>	25
• 2.1. Leyes de la dinámica	25
• 2.2. Energía	27
• 2.3. Impulso	33
• 2.4. Impulso angular	34
• 2.5. Movimiento en un campo central	36
<b>Capítulo 3</b>	
<b>La ley de Newton de la gravitación</b>	41
• 3.1. Forma de la ley de la gravitación	41
• 3.2. La constante universal de la gravitación	42
• 3.3. Ejemplos	43
• 3.4. Fuerza en el interior de una esfera	44
• 3.5. Energía potencial gravitatoria	45
• 3.6. Fuerza de marea (1)	46
• 3.7. Alturas pequeñas	47
• 3.8. Potencial gravitatorio y campo gravitatorio	53
<b>Capítulo 4</b>	
<b>Movimiento en un campo gravitatorio central</b>	61
• 4.1. Forma general de la trayectoria	61
• 4.2. Casos particulares	63

• 4.3. Períodos y tercera ley de Kepler	66
• 4.4. Independencia de la masa	68
• 4.5. Perturbación de una órbita circular	69
<b>Capítulo 5</b>	
<b>Sistemas inerciales y no inerciales</b>	76
• 5.1. Sistemas inerciales y principio de relatividad de Galileo	76
• 5.2. Sistemas en movimiento rectilíneo acelerado	76
• 5.3. Sistemas de referencia rotantes	79
• 5.4. El principio de equivalencia	83
<b>Capítulo 6</b>	
<b>Relatividad especial</b>	85
• 6.1. Introducción a la cinemática relativista	85
<b>Capítulo 7</b>	
<b>Geometrías euclídeas y no euclídeas</b>	98
• 7.1. Geometría euclídea	98
• 7.2. Introducción a las geometrías no euclídeas	99
<b>Capítulo 8</b>	
<b>La teoría de la relatividad general</b>	102
• 8.1. Bases de la teoría	102
• 8.2. Consecuencias del principio de equivalencia	104
• 8.3. Desplazamiento del perihelio	110
• 8.4. Agujeros negros	118
<b>Capítulo 9</b>	
<b>Solución de problemas</b>	120
<b>Glosario</b>	132
<b>Bibliografía</b>	135

---



---

## Prefacio

---

La idea de este libro es introducir al lector en las teorías modernas de gravitación, comenzando con la Física de Galileo y Newton y culminando con la Relatividad General propuesta por Einstein. El libro está dirigido a profesores y estudiantes de la escuela secundaria. Sin embargo, hay algunas partes del libro que resultarán más complicadas, tanto por la dificultad conceptual como por el cálculo matemático requerido. Si bien en algunas secciones se utilizan algunos elementos del cálculo diferencial e integral, no es necesario poseer conocimientos del mismo para seguir los razonamientos propuestos. En las partes en las cuales se utiliza el cálculo diferencial, se dan los resultados para aquellos lectores no familiarizados con este tipo de herramientas matemáticas. Para guiar al lector, hemos dividido la dificultad en tres niveles:

Nivel 1. Conocimientos que suponemos ya adquiridos por los alumnos en la escuela secundaria (no necesariamente técnica) o de nivel equivalente.

Nivel 2. Conocimientos nuevos para los alumnos de la escuela secundaria con algún grado de dificultad matemática o conceptual.

Nivel 3. Sólo para docentes.

El primer capítulo es una introducción histórica donde además se discuten algunos problemas sencillos de cinemática como el tiro oblicuo y el tiro vertical, y la relatividad del movimiento comparando el enfoque de la física aristotélica con el enfoque de la física de Galileo. También se describen los problemas conceptuales de la física newtoniana que llevaron a la formulación de la teoría de la Relatividad. Todo este capítulo corresponde al nivel 1.

En el segundo capítulo se establecen las bases de la teoría mecánica de Newton y se realizan un par de ejercicios de aplicación. El énfasis está puesto en la resolución de problemas a partir de la conservación de la energía, el impulso y el impulso angular. Este enfoque es diferente del que generalmente se utiliza, donde este tipo de problemas se resuelve a partir de las ecuaciones dinámicas y las ecuaciones de movimiento. El lector encontrará que este nuevo enfoque permite resolver los problemas de manera más sencilla. Todo el capítulo, menos la subsección 2.5, corresponde al nivel 1. La subsección 2.5 requiere algún conocimiento de cálculo diferencial, y por lo tanto lo consideramos de un nivel 2.

El capítulo 3 está dedicado a la ley de Newton de la gravitación universal. Se describen algunos aspectos sencillos como el movimiento parabólico y las fuerzas de marea. Todo el capítulo, menos la sección 8, corresponde a un nivel 1. La sección 8 (tal vez conceptualmente la más importante y novedosa de este capítulo) está dedicada al cálculo del potencial gravitatorio y de los campos gravitatorios. En la sección 8.4 se dan ejemplos donde se calculan campos gravitatorios a partir del principio de superposición para distintas configuraciones de masa. Esto requiere del conocimiento del cálculo vectorial (a nivel de escuela secundaria); sin embargo, el álgebra puede ser un tanto complicada y por lo tanto consideramos que corresponde a un nivel 2.

El capítulo 4 está dedicado al movimiento en un campo gravitatorio. Se describen con mucho cuidado las posibles trayectorias (circunferencias, parábolas, elipses, etc.) de un cuerpo en el campo gravitatorio en función de las constantes de movimiento del problema: energía y momento angular. También se desarrolla el movimiento de un cuerpo en una órbita con una pequeña perturbación respecto de una órbita circular. Por la dificultad matemática y conceptual del capítulo lo consideramos de nivel 2.

El capítulo 5 está dedicado al estudio de sistemas no inerciales. Esto es necesario para comprender en los capítulos siguientes la necesidad de utilizar geometrías no euclídeas en la teoría de la relatividad general. Se dan ejemplos, tanto en sistemas acelerados linealmente como en sistemas rotantes. Por la dificultad matemática para tratar sistemas rotantes, consideramos las secciones 1 y 2 (sistemas linealmente acelerados) de nivel 1, y la sección 3 (sistemas rotantes) de nivel 2. Finalmente, en la sección 4 se introduce el principio de equivalencia y, por su dificultad conceptual, se considera esta sección de nivel 2.

El capítulo 6 está dedicado a la teoría de la Relatividad Especial. En particular, se discute la medición de tiempos y longitudes desde dos sistemas inerciales, uno de los cuales se mueve con velocidad constante respecto del otro. Se muestran ejemplos para comprender estos conceptos. También se describe el efecto Doppler relativista. Finalmente en la sección 1.12 se discute la geometría en un disco rotante, paso previo para entender la utilización de geometrías no euclídeas en la teoría de la Relatividad. Este capítulo no presenta dificultades matemáticas pero sí dificultades conceptuales; por lo tanto lo consideramos de nivel 2.

En el capítulo 7 se lleva a cabo una breve introducción a las geometrías no euclídeas. En la sección 1 (considerada de nivel 1) se repasan los principios de la geometría euclídea. En la sección 2 se describen algunos conceptos de las geometrías no euclídeas, poniendo énfasis en la diferencia con la geometría euclídea. Por la dificultad conceptual consideramos a la sección 2 de nivel 2.

Finalmente, en el capítulo 8 se describen las bases de la teoría de la Relatividad General, así como algunas consecuencias de la misma, como la deflexión de la luz y el corrimiento al rojo en un campo gravitatorio. También se discuten las nociones de tiempo y espacio en Relatividad General. Las secciones 1 y 2 son consideradas de nivel 2 por su dificultad matemática y conceptual. La sección 3 describe el corrimiento del perihelio de un planeta a partir de la corrección relativista en la expresión newtoniana de la trayectoria. La dificultad matemática es importante en esta sección, y por lo tanto consideramos que puede ser completamente comprendida sólo por docentes (nivel 3); sin embargo, el significado físico de los resultados obtenidos sí se considera accesible para los estudiantes de nivel medio.

Susana Landau  
Claudio Simeone

# 1. Introducción histórica

## □ 1.1. Descripción del movimiento en la antigüedad

### 1.1.1 El movimiento de los cuerpos celestes

A partir del siglo IV antes de nuestra era, la mayor parte de los filósofos y astrónomos griegos sostenía que la Tierra era una esfera inmóvil muy pequeña que estaba suspendida en el centro geométrico de una esfera en rotación mucho mayor, que llevaba consigo a las estrellas (ver figura 1.1). El Sol se desplazaba por el espacio comprendido entre la Tierra y la esfera de las estrellas. Más allá de la esfera exterior no había nada, ni espacio, ni materia. Los historiadores modernos llaman a este esquema conceptual, compuesto inicialmente por dos esferas: una interior para el hombre y otra exterior para las estrellas, el universo de las dos esferas. En realidad, el universo de las dos esferas no es una verdadera cosmología, sino un marco estructural en el cual se encuadran concepciones globales sobre el universo. Dicho marco comprende un gran número de sistemas astronómicos y cosmológicos diferentes y contradictorios que se utilizaron durante los diecinueve siglos que separan el siglo IV a.C de la época de Copérnico.

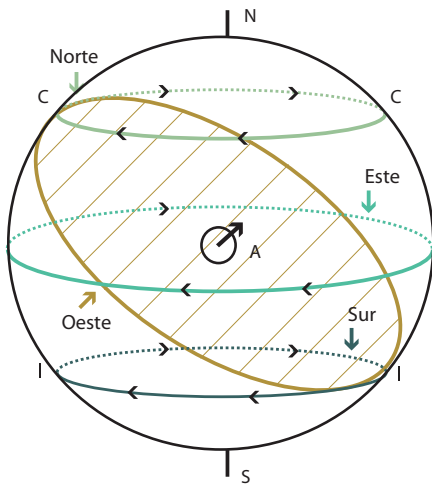


Figura 1.1. El universo de las dos esferas.

Veamos la descripción del movimiento de las estrellas, el Sol y los planetas en este marco conceptual. La figura 1.1 nos muestra una Tierra esférica situada en el centro de una esfera mayor que es la de las estrellas. El observador, situado en el punto A, puede ver toda la parte de la esfera situada por encima del plano del horizonte (ver figura 1.1) rayado en el diagrama. Las estrellas se encuentran engarzadas en la superficie de la esfera exterior. De esta manera, cada estrella mantiene su posición respecto de las demás cuando se la observa desde la Tierra, situada en el centro del sistema global. Si la esfera gira uniformemente alrededor de un eje que pasa por los puntos diametralmente opuestos N y S, todas las estrellas, excepto las situadas en N o S, se verán arrastradas por dicho movimiento. Para un observador situado en A, un objeto situado en el punto N de la esfera exterior

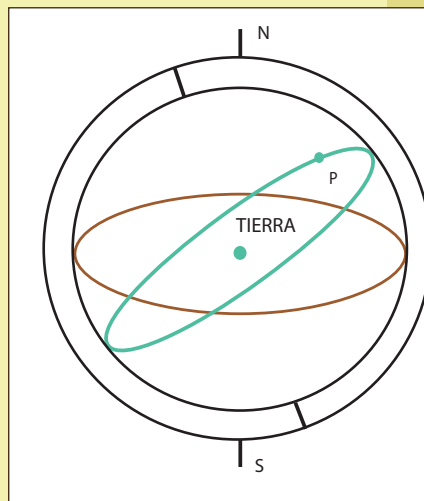
parece girar describiendo círculos alrededor del Polo; si la esfera gira sobre sí misma una vuelta completa cada 23 horas 56 minutos (un día), dicho objeto completa su círculo en idéntico período. De esta manera, las estrellas realizan movimientos circulares sobre la esfera exterior. Todas las estrellas suficientemente próximas al Polo por hallarse situadas por encima del círculo CC (ver figura 1.1) del diagrama son circumpolares, pues la

rotación de la esfera no las hace descender nunca por debajo de la línea del horizonte. Las estrellas situadas entre los círculos CC e II salen y se ponen formando un ángulo distinto respecto de la línea del horizonte en cada una de las rotaciones de la esfera; las más próximas al círculo II apenas si se elevan por encima del horizonte sur y sólo son visibles durante un breve lapso.

Finalmente, las estrellas situadas por debajo del círculo II y cercanas al punto S nunca aparecen ante la vista de un observador situado en A, pues se las oculta el horizonte.

El movimiento del Sol, la Luna y los planetas se representa agregando esferas concéntricas e interconectadas entre la esfera de las estrellas y la Tierra. La rotación simultánea en torno de diferentes ejes reproduce el movimiento del cuerpo celeste que se quiere estudiar.

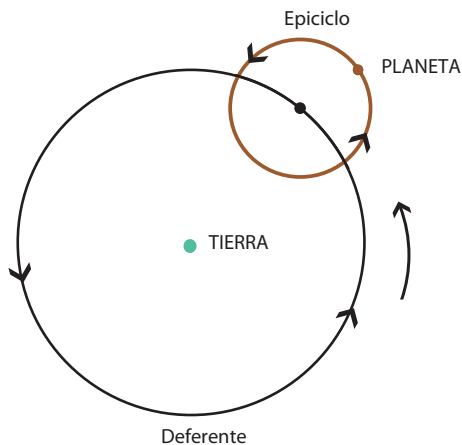
En la figura 1.2 se muestra un corte transversal de las esferas correspondientes al Sol y las estrellas, cuyo centro común es la Tierra y cuyos puntos de contacto son los extremos del eje inclinado de la esfera interior que le sirven de pivotes. La esfera exterior es la esfera de las estrellas, su eje pasa por los polos norte y sur celestes y da una revolución completa alrededor del mismo, en sentido oeste, cada 23 horas 56 minutos. El eje de la esfera interior (esfera correspondiente al Sol) está en contacto con la esfera exterior en dos puntos diametralmente opuestos y situados a una distancia angular de  $23^{\circ}30'$  y en medio de cada uno de los polos celestes; el ecuador de la esfera interior, cuando se lo observa desde la Tierra, coincide con la eclíptica de la esfera de las estrellas, sea cual sea la rotación de ambas esferas. Si añadimos al sistema que acabamos de exponer una nueva esfera animada de un movimiento de rotación muy lento, es posible describir con bastante aproximación el movimiento observado de la Luna.



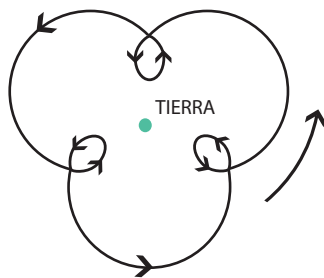
**Figura 1.2.** Trayectoria del Sol en el universo de las dos esferas.

De esta manera, en la antigüedad se podía explicar con dos o tres esferas concéntricas el movimiento diario del Sol y de la Luna. Pero no era posible explicar el movimiento anual <sup>1</sup> de los planetas debido a que éstos realizan un movimiento general hacia el este, pero en determinados momentos de su trayectoria cambian de sentido y se mueven hacia el oeste. Este último movimiento es conocido como la retrogradación de los planetas. Los astrónomos de la antigüedad se dieron cuenta de que agregando esferas al esquema anterior es posible reproducir el movimiento de retrogradación. Sin embargo, no era posible explicar el aumento que se observaba en el brillo de los planetas durante el movimiento de retrogradación. Un astrónomo egipcio, Claudio Ptolomeo (178 - 100) A.C., en el tratado astronómico *Almagesto* propuso un sistema matemático que intentaba solucionar, dentro del marco conceptual del universo de las dos esferas, esta discrepancia entre teoría y observación.

<sup>1</sup> Nos referimos al movimiento correspondiente a las sucesivas posiciones a lo largo de un año.



**Figura 1.3.** En la astronomía de la antigüedad la retrogradación de los planetas se explica mediante epiciclos y deferentes.



**Figura 1.4.** Movimiento de un planeta sobre la esfera de las estrellas en el esquema conceptual de Ptolomeo.

El sistema matemático propuesto por Ptolomeo fue utilizado por varios astrónomos de la antigüedad para explicar el movimiento de los planetas, incluyendo la variación de brillo durante la retrogradación. Se compone de un pequeño círculo, el epiciclo, que gira uniformemente alrededor de un punto situado sobre la circunferencia de un segundo círculo en rotación, el deferente (ver figura 1.3). El planeta P está situado sobre el epiciclo y el centro del deferente coincide con el centro de la Tierra. El sistema epiciclo-deferente sólo pretende explicar el movimiento planetario respecto de la esfera de las estrellas. Si el epiciclo da exactamente tres vueltas alrededor de su centro móvil mientras el deferente efectúa una revolución completa, girando ambos círculos en un mismo sentido, el movimiento total del planeta sobre la esfera de las estrellas tiene lugar según la curva representada en la figura 1.4. Cuando la rotación del epiciclo arrastra al planeta fuera del deferente, los movimientos combinados de éste y del epiciclo obligan al planeta a dirigirse hacia el este, pero cuando el movimiento del epiciclo le coloca dentro del deferente, aquél arrastra al planeta hacia el oeste. Así, cuando el planeta está en su posición más próxima a la Tierra el movimiento resultante es hacia el oeste. De esta manera es posible explicar el aumento del brillo de los planetas durante el movimiento de retrogradación. En el sistema epiciclo-deferente descrito en la figura 1.3, el epiciclo completa exactamente tres revoluciones por cada una de las que efectúa el deferente. Esto es una simplificación que no es característica del movimiento de ningún planeta. Por ejemplo, el epiciclo de Mercurio debe completar algo más de tres vueltas mientras el deferente da un giro completo.

De esta manera, para describir los movimientos de todos y cada uno de los planetas, los astrónomos de la antigüedad utilizaban un sistema epiciclo-deferente particular para cada una de ellos. A su vez, si bien el sistema es capaz de dar cuenta de la retrogradación de los planetas, no puede describir otras anomalías.

## 1.1.2 El movimiento de los cuerpos sobre la Tierra

Las ideas de Aristóteles, filósofo y científico griego que vivió entre los años 384 y 323 a.C, constituyeron el punto de partida para la mayor parte del pensamiento cosmológico medieval y gran parte del renacentista. El universo de Aristóteles es un universo lleno de materia donde el vacío no existe; es cerrado y no tiene exterior: "afuera" del universo no existe

nada, ni espacio, ni materia. Posee dos regiones bien diferenciadas: la región supralunar y la región sublunar. La región supralunar contiene ocho cáscaras esféricas concéntricas, es decir con un centro común. Comprenden a las estrellas fijas, los cinco planetas conocidos en la antigüedad (Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno), el Sol y la Luna. La Tierra se encuentra en el centro geométrico de las esferas concéntricas. Todas las estrellas se encuentran sobre la mayor de las cáscaras, es decir, que están a igual distancia de la Tierra. Más allá de la cáscara de las estrellas, donde no hay ni espacio ni tiempo, "está" el motor inmóvil, que ha movido el mundo desde siempre. Este motor inmóvil impulsa la esfera de las estrellas fijas, cuyo movimiento se transfiere hacia la esfera de Saturno y así sucesivamente hasta llegar a la cáscara lunar, y a su vez se trasmite al mundo sublunar. Por lo tanto, las cáscaras no sólo se mueven, sino que también transmiten el movimiento. En la práctica, Aristóteles utilizó 55 esferas para explicar el movimiento del Sol, la Luna y los planetas. Este agregado se debía a cuestiones físicas, ya que si bien todas las esferas adjuntas debían hallarse mecánicamente conectadas, el movimiento individual de cada planeta no debía transmitirse a los demás. Las esferas agregadas se denominaron esferas neutralizadoras y su función era la de compensar los movimientos de algunas de las esferas primarias. Según Aristóteles, el mundo supralunar, cuyo límite inferior lo constituye la cáscara correspondiente a la Luna, se encuentra lleno de éter, un elemento cristalino y transparente sin peso, incorruptible y que no se mezcla con nada. Su movimiento es el más perfecto, es eterno, no tiene principio ni fin; por lo tanto, es un movimiento circular. Los planetas y estrellas, así como las cáscaras esféricas cuya rotación explica los movimientos celestes, están hechos de éter.

La región sublunar está totalmente ocupada por cuatro elementos. Según las leyes aristotélicas del movimiento, en ausencia de empujes o atracciones exteriores, dichos elementos se ordenan en una serie de cáscaras concéntricas de modo similar a como se distribuyen las esferas de éter que los envuelve. La tierra, que es el elemento más pesado, se coloca naturalmente en la esfera que constituye el centro geométrico del universo. Todos aquellos cuerpos en los que ella predomine caen, buscando su lugar natural que es el centro de la Tierra; cuanto más pesados sean, más rápidamente caerán. El agua, elemento también pesado, pero menos que la tierra, forma una envoltura esférica alrededor de la región central ocupada por la tierra. El fuego, el más ligero de los elementos, se eleva espontáneamente para constituir su propia esfera justo por debajo de la Luna. Y el aire, también un elemento ligero, completa la estructura formando una esfera que llena el hueco existente entre el agua y el fuego. Una vez en dichas posiciones, los elementos permanecen en reposo manteniendo toda su pureza. Sin embargo, los elementos y los cuerpos que conforman se ven constantemente arrancados de sus ubicaciones naturales. Para ello es necesaria la intervención de una fuerza, porque según Aristóteles todo elemento se resiste a desplazarse y cuando lo hace siempre intenta volver a su posición natural por el camino más corto posible. Por ejemplo, cuando tomamos una roca, percibimos cómo tira hacia abajo en un intento por alejarse del lugar que está ocupando y recobrar su posición natural en el centro del universo; del mismo modo, en una noche despejada, vemos cómo las llamas de una hoguera forcejean se elevan tratando de recuperar su lugar natural en la periferia de la región sublunar.

Según la física aristotélica, la esfera de la Luna no sólo divide al universo en dos regiones con diferente composición natural, también lo divide en dos regiones con diferentes leyes.

Todos los movimientos se dan respecto de un punto: el centro del universo. Los movimientos sublunares son rectilíneos y consisten en alejarse hacia arriba o hacia abajo del centro (según la pesadez o la liviandad). Los movimientos supralunares son desplazamientos circulares alrededor del centro del universo.

Como en este libro nos interesan las leyes del movimiento, vamos a discutir, con un poco más de detalle, la caída de los cuerpos en distintos casos. Dice Aristóteles en *Del Cielo*:

*"Si se colocara la Tierra en la posición actualmente ocupada por la Luna, cada una de sus partes no se vería atraída hacia el conjunto sino hacia el lugar que ahora ocupa dicho conjunto."*

Es decir, que cada una de sus partes se ve atraída hacia su "lugar natural" en el centro del universo. Todo proceso de cambio, como el que involucra el movimiento de los cuerpos terrestres, no constituye un estado, por el contrario, es algo transitorio. El verdadero estado de los cuerpos sublunares es el reposo. Siguiendo con la misma línea de pensamiento, según la descripción física de Aristóteles, el movimiento natural de una piedra sólo está regido por el espacio y no por su relación con otros cuerpos, ni por su movimiento previo. Por ejemplo, una piedra lanzada verticalmente hacia arriba se aleja del suelo y retorna a él a lo largo de una línea recta fijada de una vez por todas en el espacio, y si la Tierra se mueve mientras la piedra está en el aire no caerá sobre el mismo punto del que partió. Análogamente, las nubes que ocupan ya los lugares naturales que les han sido asignados, serían dejadas atrás por una Tierra en movimiento. La única posibilidad que cabría para que una piedra o una nube siguieran a la Tierra en su movimiento sería que ésta arrastrara el aire que la circunda y, aún en tal caso, el movimiento del aire no empujaría a la piedra con la fuerza necesaria para comunicarle la misma velocidad que posee la Tierra en su rotación. Este tipo de razonamientos pueden aplicarse para explicar el movimiento de un proyectil. Este es uno de los puntos más débiles de la teoría de Aristóteles.

Supongamos el problema de un proyectil lanzado desde una cierta altura con velocidad inicial en la dirección horizontal. Aristóteles suponía que el aire perturbado era la fuente del impulso que prolonga el movimiento del proyectil una vez perdido todo contacto con el elemento propulsor. Sostenía que el proyectil abandona con toda rapidez la posición que ocupaba y que la naturaleza, que no tolera vacío alguno, envía de inmediato el aire tras él para que llene el vacío creado. El aire, desplazado de tal forma, entra en contacto con el proyectil y lo empuja para adelante. Este proceso se repite continuamente a lo largo de una cierta distancia. Esta concepción errónea fue el objeto de una de las primeras agudas críticas de Galileo a la mecánica aristotélica.

---

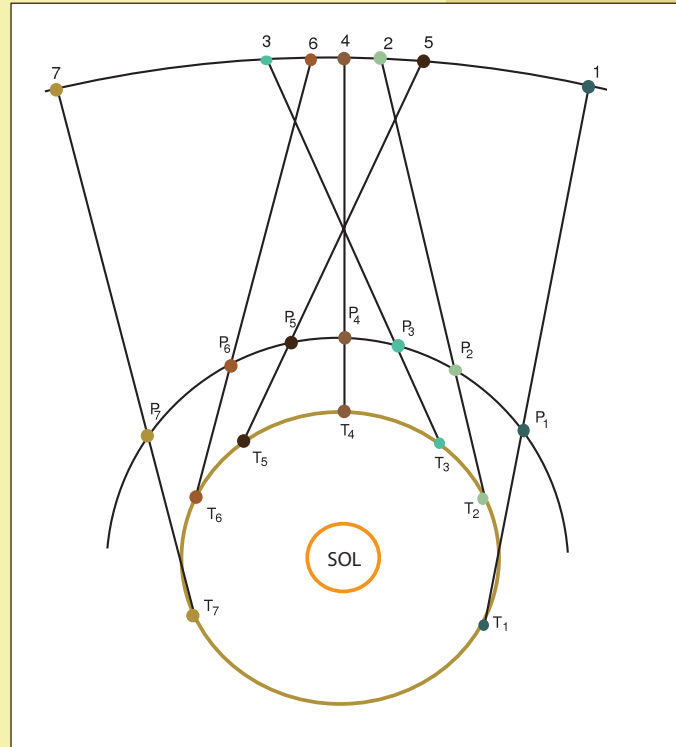
## □ 1.2. El movimiento de los cuerpos celestes para los astrónomos modernos

---

### 1.2.1 Nicolás Copérnico

---

Nicolás Copérnico (1473-1543) fue a la vez: el último astrónomo ptolemaico y el primer astrónomo moderno. En 1507 difundió el primer esbozo de su sistema heliocéntrico: el *Commentariolus*. Su obra más importante titulada *De revolutionibus* se publicó en 1543. En ella describe con todo detalle su sistema cosmológico. En el centro del universo, fijo, se encuentra el Sol. La Tierra es transportada alrededor del Sol por una esfera similar a la que hasta entonces se había usado para arrastrar el Sol alrededor de la Tierra. Copérnico atribuyó a la Tierra tres movimientos circulares simultáneos: una rotación cotidiana axial, un movimiento orbital anual y un movimiento cónico y anual del eje. La rotación diaria hacia el este es la que explica los círculos cotidianos aparentes descritos por las estrellas, el Sol, la Luna y los planetas. El movimiento retrógrado de un planeta a través de las estrellas sólo es aparente, y está producido, lo mismo que el movimiento aparente del Sol a lo largo de la eclíptica, por el movimiento orbital de la Tierra. Según Copérnico, el movimiento que los astrónomos de la antigüedad explicaban con la ayuda de epiciclos mayores era el de la Tierra, atribuido por el observador a los planetas a causa de su creencia en la propia inmovilidad. En la figura 1.5 se muestran en proyección sobre el fondo fijo de la esfera estelar sucesivas posiciones aparentes de un planeta superior en movimiento. La figura 1.6 nos muestra sucesivas posiciones aparentes, vistas desde una Tierra móvil, de un planeta inferior. Tanto en uno como en otro caso, sólo se han indicado los movimientos orbitales; se ha prescindido de la rotación diaria de la Tierra, que es la que produce el rápido movimiento aparente hacia el oeste del Sol, los planetas y las estrellas. Las sucesivas posiciones de la Tierra sobre su órbita circular centrada en el Sol se han rotulado en las figuras 1.5 y 1.6 por los puntos T1, T2, . . . , T7 y las correspondientes posiciones sucesivas del planeta por P1, P2, . . . , P7; las respectivas posiciones aparentes del planeta están indicadas en la figura 1.5 con 1, 2, . . . , 7. Dichas



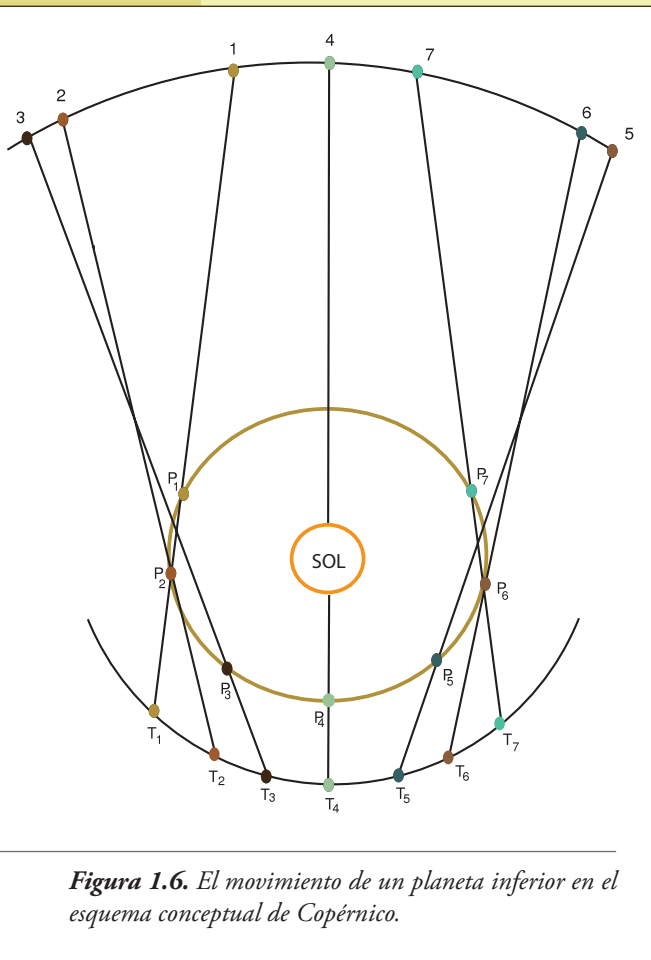
**Figura 1.5.** El movimiento de un planeta superior en el esquema conceptual de Copérnico.

posiciones se obtienen prolongando la recta que une la Tierra con el planeta hasta cortar la esfera de las estrellas. De las figuras 1.5 y 1.6 se puede ver que el movimiento aparente del planeta a través de las estrellas es hacia el este de 1 a 2 y de 2 a 3. A continuación el planeta retrograda de 3 a 4 y de 4 a 5. Finalmente, invierte de nuevo la dirección de su movimiento y se desplaza con normalidad de 5 a 6 y de 6 a 7. Cuando la Tierra completa su giro orbital, el planeta prosigue su movimiento normal hacia el este, desplazándose con mayor rapidez cuando se encuentra en posición diametralmente opuesta a la Tierra respecto del Sol. Así, en el sistema de Copérnico los planetas observados desde la Tierra parecerán moverse hacia el este durante la mayor parte del tiempo; sólo retrogradan cuando la Tierra, en su movimiento orbital los sobrepasa (planetas superiores) y cuando



son ellos los que sobrepasan a la Tierra (planetas inferiores). El movimiento retrógrado sólo puede producirse cuando la Tierra ocupa su posición más próxima respecto del planeta cuyo movimiento se estudia, hecho totalmente acorde con los datos de observación (los planetas brillan más cuando retrogradan). El movimiento retrógrado y la variación del tiempo empleado en recorrer la eclíptica constituyen las dos irregularidades planetarias que, en la antigüedad, habían impulsado a los astrónomos a emplear epiciclos y deferentes para tratar el problema de los planetas. Copérnico consiguió ofrecer una misma explicación cualitativa de los movimientos aparentes con sólo siete círculos. Le bastó con emplear un sólo círculo centrado en el Sol para cada uno de los seis planetas conocidos y un círculo para la Luna. De esta manera, su sistema era mucho más simple que cualquier sistema ptolemaico, y explicaba, de la misma manera, las observaciones disponibles.

### 1.2.2 Tycho Brahe y Johannes Kepler



**Figura 1.6.** El movimiento de un planeta inferior en el esquema conceptual de Copérnico.

Tycho Brahe (1546 - 1601) fue el astrónomo europeo más importante de la segunda mitad del siglo XVI. Fue el responsable de cambios de enorme importancia en las técnicas de observación astronómica. Diseñó y construyó un gran número de nuevos instrumentos, más grandes, más sólidos y mejor calibrados que los usados hasta entonces. Buscó y corrigió muchos errores debidos al empleo de instrumentos imprecisos, estableciendo de este modo, un conjunto de nuevas técnicas para recoger información precisa sobre las posiciones de estrellas y planetas. A su vez, Brahe inauguró la técnica de efectuar observaciones regulares de los planetas, modificando la práctica tradicional de observarlos sólo cuando estaban situados en algunas configuraciones particularmente favorables. La precisión de sus observaciones de las posiciones de los planetas parece haber sido, por lo general, de unos 4' de arco. Precisión más de dos veces superior a la alcanzada por los mejores observadores de la antigüedad.

Johannes Kepler (1571-1630) fue el primer astrónomo que intentó introducir una física cuantitativa para la descripción de los fenómenos observados en los cielos, buscando explicaciones mecánicas que pudiesen ser formuladas en términos matemáticos. Kepler suponía que el movimiento de los planetas se debía a una fuerza invisible proveniente del Sol, y le disgustaba la idea de Copérnico de que el centro del sistema debía ser un punto en el vacío.

En el sistema de Ptolomeo, los planos de todas las órbitas se intersecaban en el centro de la Tierra. Copérnico conservó una propiedad similar para la Tierra al suponer que lo hacían en el centro de la órbita terrestre, un punto ligeramente corrido del Sol. En cambio, para Kepler la intersección debía darse en el Sol, dado que suponía que la fuerza que provocaba los movimientos planetarios sólo podía provenir de él.

Kepler efectuó sus descubrimientos esenciales estudiando el movimiento de Marte, un planeta cuya excentricidad y proximidad a la Tierra eran responsables de las irregularidades que habían constituido un problema permanente para los astrónomos. Ptolomeo había sido incapaz de explicar el movimiento de Marte de forma tan satisfactoria como el de los restantes planetas y Copérnico no había aportado nada nuevo al respecto. Utilizando los datos obtenidos por Tycho Brahe, Kepler intentó, sin éxito, explicar con combinaciones de círculos y luego con óvalos la órbita observada de Marte. Finalmente, reparó en que las discrepancias entre sus tentativas teóricas y las observaciones variaban según una ley matemática familiar, y estudiando esta regularidad descubrió que podían reconciliarse teoría y observación si se consideraba que los planetas se desplazaban con velocidad variable sobre órbitas elípticas. Estas conclusiones se conocen como la primera y segunda ley de Kepler:

1. Los planetas se desplazan a lo largo de elipses, en uno de cuyos focos está el Sol.
2. La velocidad orbital de los planetas varía de tal manera que una línea que una el Sol con el planeta barre áreas iguales, sobre la elipse, en intervalos de tiempo iguales.

La tercera ley de Kepler, formulada 10 años después, es una ley astronómica de un nuevo género ya que establece una relación cuantitativa entre las velocidades de planetas situados en órbitas diferentes:

3. Si  $T_1$  y  $T_2$  son los respectivos períodos que tardan dos planetas en completar sus correspondientes revoluciones y  $R_1$  y  $R_2$  las distancias medias de tales planetas al Sol, entonces se cumple la siguiente relación:

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 \propto \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3 \quad (1.1)$$

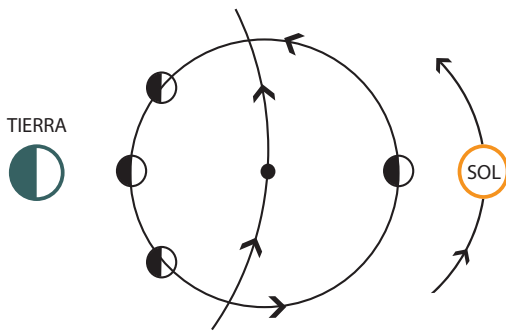
donde  $\propto$  indica proporcionalidad. Estas leyes juegan un papel central en la formulación ulterior de la ley de Newton de la gravitación.

---

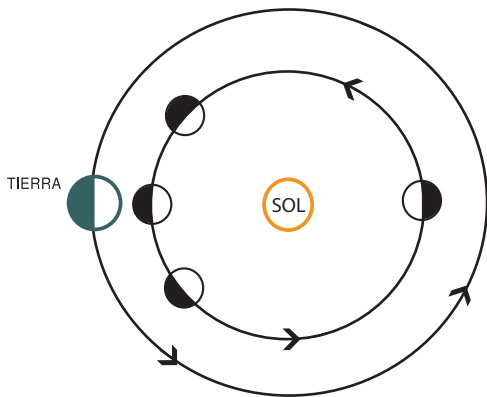
### 1.2.3 Galileo Galilei

---

En 1609 Galileo Galilei (1564-1642) observó por primera vez el cielo a través de un telescopio, aportando a la astronomía los primeros datos cualitativos nuevos desde los recopilados en la antigüedad. El tamaño del Sol, la Luna y los planetas era aumentado por el uso del telescopio; en cambio, las estrellas seguían viéndose como puntos. Cuando Galileo dirigió su telescopio a la Luna, descubrió que su superficie estaba cubierta por cavidades, cráteres, valles y montañas. Midiendo la longitud de las sombras proyectadas en los



**Figura 1.7.** Las fases de Venus en el sistema ptolemaico; un observador terrestre siempre estaría limitado a ver una delgada "media luna" de la cara iluminada de Venus.



**Figura 1.8.** Las fases de Venus en el sistema copernicano; un observador terrestre puede ver casi toda la cara iluminada.

cráteres y las montañas, consiguió estimar la profundidad de los declives y protuberancias lunares, iniciando con ello una descripción de la topografía lunar. Galileo encontró que dicha topografía era bastante similar a la terrestre. Esto entraba en total contradicción con la división aristotélica entre la región celeste y la región terrestre.

Además, las observaciones telescópicas del Sol, mostraban también una serie de imperfecciones, entre ellas una serie de manchas sombreadas que aparecían y desaparecían sobre su superficie. La existencia de tales manchas contradecía la supuesta perfección de la región celeste; su aparición y desaparición contradecían la inmutabilidad de los cielos. A su vez, Galileo observó a Júpiter con el telescopio y descubrió cuatro puntos iluminados muy próximos a dicho planeta. Observaciones múltiples efectuadas en noches sucesivas mostraron que las posiciones relativas de dichos puntos se modificaban de tal forma, que la explicación más simple era suponer que giraban continuamente y de forma muy rápida alrededor de Júpiter. Estos cuerpos celestes eran las cuatro lunas principales de Júpiter. Muchas de las observaciones telescópicas de Galileo contribuyeron a recopilar datos que apoyaban el sistema astronómico de Copérnico. Sin embargo, las observaciones de las fases de Venus aportaron una prueba directa de la correcta fundamentación de la propuesta de Copérnico. En la figura 1.7 se muestra el caso de Venus fijado a un epiciclo que se mueve sobre un deferente centrado en la Tierra. Si la Tierra, el Sol y el centro del epiciclo están alineados, un observador situado sobre la Tierra nunca podrá ver otra cosa que un sector, en fase creciente, del planeta. Por el contrario, si la órbita de Venus circunda al Sol (ver figura 1.8), un observador situado sobre la Tierra podrá ver un ciclo casi completo de las fases de Venus.

## □ 1.3. El movimiento sobre la Tierra a partir de Galileo

### 1.3.1 La caída de los cuerpos y la ley de inercia

Galileo no creía que el espacio estuviese estructurado en forma absoluta, ni que existiesen un arriba y un abajo absolutos (como lo eran para Aristóteles la esfera de las estrellas fijas y el centro de la Tierra, respectivamente). Para Galileo, el lugar natural de un cuerpo estaba

determinado por su "fuente". Así el lugar natural de un trozo de tierra era la Tierra y una piedra, cuando cae, no hace sino regresar a su lugar natural. De igual manera, un trozo de Luna, abandonado libremente, debía retornar a la Luna. A su vez, Galileo sostuvo que todos los cuerpos, independientemente de su tamaño, peso y composición, debían caer incrementando su velocidad de igual forma. En relación con esta afirmación propuso el experimento de la torre de Pisa, en el que se dejaban caer balas de cañón de distinto tamaño para ver si llegaban al suelo al mismo tiempo. Por otro lado, Galileo enunció la ley de caída de los cuerpos que relaciona la distancia recorrida con el cuadrado del tiempo transcurrido. En sus *Diálogos acerca de dos nuevas ciencias* estableció el Teorema II, Proposición II, que dice:

"Si un móvil cae, partiendo del reposo, con un movimiento uniformemente acelerado, los espacios por él recorridos en cualquier tiempo que sea están entre sí como el cuadrado de la proporción entre los tiempos, o lo que es lo mismo, como los cuadrados de los tiempos".

A su vez, Galileo entiende el problema del tiro horizontal de un proyectil como una superposición de movimientos: un movimiento horizontal con velocidad constante y un movimiento vertical acelerado. Para Galileo, si un movimiento cesa es porque existen causas para que ello ocurra así. Esto es totalmente opuesto a la concepción aristotélica de que los cuerpos supralunares se encuentran naturalmente en reposo. En su obra *Mecánica*, Aristóteles sostuvo: "El cuerpo en movimiento se detiene cuando la fuerza que lo empuja deja de actuar". Sobre el mismo punto, Galileo expuso en *Dos nuevas ciencias*:

"Toda velocidad, una vez impartida a un cuerpo, se conservará mientras no existan causas externas de aceleración o frenado, condición que se cumple solamente sobre los planos horizontales; pues el movimiento de un cuerpo que cae por una pendiente se acelera, mientras que el movimiento hacia arriba se frena; de esto se infiere que el movimiento sobre un plano horizontal es perpetuo; pues si la velocidad es uniforme, no puede disminuirse y menos aún destruirse."

En el caso del proyectil, éste tiende a mantener su movimiento horizontal a pesar de la existencia del aire que le opone una resistencia. Si no hubiese aire, se movería con más facilidad. La desaparición del aire haría que el proyectil se moviese manteniendo la misma velocidad horizontal (aunque en la práctica no pueda mantenerse, pues la gravedad lo hace caer y finalmente chocar con el piso). Esta clave acerca del movimiento de los cuerpos encontrada por Galileo (el principio de inercia) será formalizada por Newton:

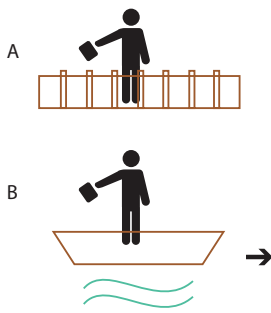
"Un cuerpo en reposo o en movimiento se mantendrá en reposo o en movimiento rectilíneo y uniforme, a menos que sobre él actúen fuerzas exteriores que lo obliguen a modificar dichos estados."

---

## 1.3.2 Relatividad del movimiento

---

Imaginemos la siguiente situación: un barco se desplaza a velocidad uniforme y pasa debajo de un puente. En el puente hay un hombre que sostiene una piedra; en el barco, un marinero, subido a su mástil, sostiene otra. Cuando el barco pasa por debajo del puente y ambos hombres



**Figura 1.9.** Dos hombres, uno ubicado en un puente, y otro exactamente debajo en un barco, con sus respectivas piedras.

están situados sobre la misma vertical, dejan caer sus respectivas piedras (ver figura 1.9). No existe duda acerca de que la piedra A del hombre del puente cae por debajo de él. El problema se refiere a la piedra B. Para quienes abordaron este problema antes de Galileo (incluyendo por ejemplo a Tycho Brahe), las dos piedras deben caer en el mismo sitio, independientemente de su estado de movimiento anterior. Ambas deben buscar su lugar natural, y para alcanzarlo, deberán bajar en línea recta. En consecuencia, sus caídas deberían ser idénticas. Por lo tanto, el marinero tendría que ver su piedra caer hacia atrás y al pie del puente (ver figura 1.10). Para Galileo, la piedra B cae al pie del mástil y no al pie del puente debido a que en la piedra B existe una superposición de movimientos, que se pueden identificar analizando lo que verían el hombre del puente y el hombre del barco. Ambos observadores, coinciden en que A cae al pie del puente y B al pie del mástil. Pero mientras que el hombre del puente ve caer a la piedra A verticalmente y a la piedra B describiendo una parábola (ver figura 1.11 izquierda), el marinero ve que A describe una parábola hacia atrás y B una vertical (ver figura 1.11 derecha). En resumen, para Galileo el movimiento y la forma del movimiento *son relativos al sistema de referencia*.

Ahora bien, supongamos que el barco estuviese cubierto y que el marinero no pudiese ver el exterior. Si al realizar la experiencia se obtiene como resultado que su piedra, la B, cae al pie del mástil, él también podría pensar que su barco se encuentra en reposo, anclado en algún puerto, dado que es eso mismo lo que observa cuando deja caer una piedra en tierra firme.

Vemos, entonces, que las experiencias realizadas por el marinero en un barco anclado en puerto, o en el mismo barco moviéndose con velocidad constante, serían indistinguibles y deberían dar cuenta del mismo resultado. Esto es lo que se conoce como el *principio de relatividad* de Galileo y suele ser formulado de la siguiente manera:

"Si las leyes de la mecánica son válidas en un sistema de referencia inercial, también se cumplen en cualquier sistema de referencia que se mueva uniformemente respecto del primero".

Volveremos sobre este tema en los capítulos posteriores.

## □ 1.4. Unificación de las leyes del movimiento

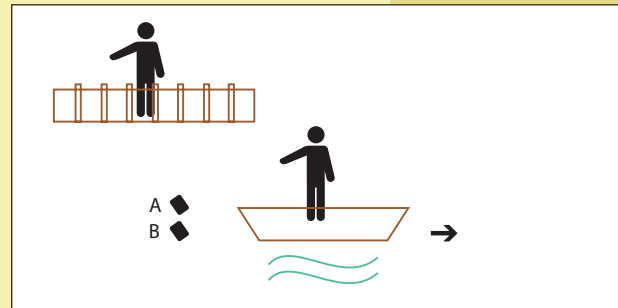
En 1666 Isaac Newton (1642 - 1727) logró determinar matemáticamente en qué grado un planeta debe "caer" hacia el Sol, o la Luna hacia la Tierra, para mantenerse estable en una órbita elíptica determinada. Posteriormente, descubrió que los valores matemáticos que regían la caída variaban en función de la velocidad del planeta y del semieje mayor de su órbita elíptica. A partir de estos cálculos, Newton pudo deducir dos consecuencias físicas de enorme importancia. Por un lado, estableció que si la velocidad de un planeta y el semieje mayor de su órbita elíptica están vinculados entre sí por la tercera ley de Kepler, la atracción de un planeta hacia el Sol debe

decrecer en razón de la inversa del cuadrado de la distancia entre ambos. El segundo de los descubrimientos de Newton fue igualmente importante. Advirtió que esta misma ley que regía la atracción entre el Sol y los planetas explicaba perfectamente bien las diferencias entre las velocidades con que "caían" a la Tierra la Luna y una piedra. Supongamos que en la superficie de la Tierra y desde la cima de una montaña exageradamente alta, un cañón lanza proyectiles cada vez con mayor velocidad inicial. Según Galileo, estos proyectiles describen parábolas <sup>2</sup>. En la figura 1.12 se puede ver que el proyectil E correspondería al caso de un cuerpo que en su "caída" sigue la forma de la Tierra. Algo parecido ocurre con la Luna. Horrocks, un científico inglés, había calculado la órbita de la Luna utilizando las leyes de Kepler. Estos datos, acoplados a los resultados de los cálculos de Galileo para el movimiento parabólico de los proyectiles, le proporcionaron a Newton la información necesaria para identificar la órbita kepleriana de la Luna con la de un proyectil. La idea era que, si la Luna no caía por la acción de la fuerza gravitatoria, era debido a que su velocidad inicial era similar a la del proyectil E de la figura 1.12. Lo mismo sucede al hacer girar una piedra con un hilo: la tensión del hilo hace las veces de fuerza gravitatoria y la piedra describe circunferencias hasta que se la suelta. La forma de la acción gravitatoria que permite explicar las órbitas de los planetas en torno del Sol, y de la Luna alrededor de la Tierra, se inspira en lo que se experimenta con los cuerpos terrestres. Con Newton, los conceptos de lugar natural o de tendencias a volver a un todo desaparecen definitivamente. Además, el concepto mismo de caída experimenta una transformación: se trata de un movimiento que se efectúa bajo la acción de la fuerza gravitatoria.

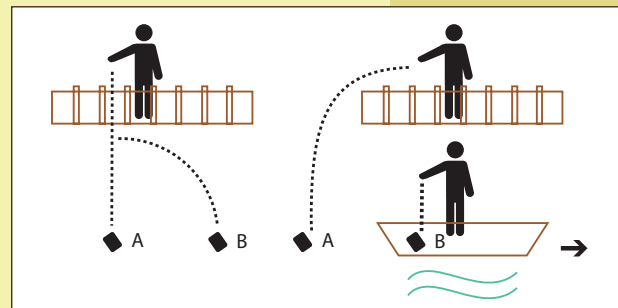
## □ 1.5. La teoría de la Relatividad

Las leyes que gobiernan los fenómenos electromagnéticos fueron concebidas por James Clerk Maxwell (1831 - 1879), luego de las investigaciones sobre la inducción electromagnética llevadas a cabo por Faraday hacia 1831. Las leyes de Maxwell predicen que la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas coincide con el valor medido de la velocidad de la luz, lo cual llevó a Maxwell a concluir que la luz es un fenómeno electromagnético. Así como las ondas

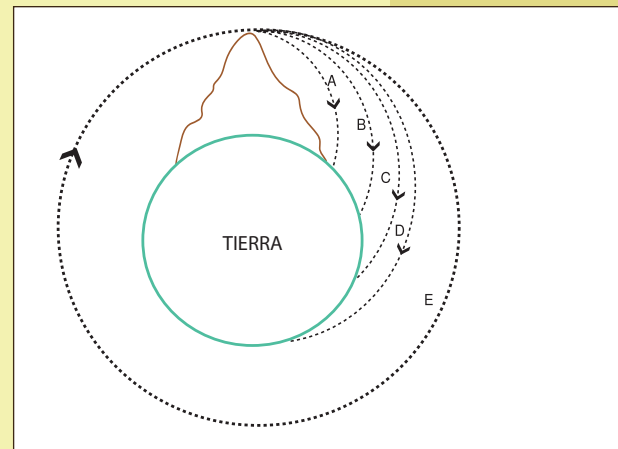
<sup>2</sup> Esta es una aproximación válida para alturas pequeñas; en realidad, describen arcos de elipses.



**Figura 1.10.** El problema del movimiento relativo antes de Galileo.



**Figura 1.11.** El problema del movimiento relativo según Galileo. Izquierda: lo que observaría el hombre del puente. Derecha: lo que observaría el hombre del barco.



**Figura 1.12.** Proyectiles arrojados desde una montaña con diferentes velocidades.

sonoras necesitan de un medio material (aire, agua, etc,...) para propagarse, en esa época se postuló que la luz se propaga en un medio denominado *éter*, que se encontraba en todo el espacio llegando hasta las estrellas. Como la luz viaja tan rápido, se postuló que el éter era un elemento muy poco denso, y muy difícil de comprimir. Por otro lado, el éter debía permitir a los cuerpos sólidos atravesarlo libremente, o de lo contrario los planetas irían reduciendo su velocidad. Por todos estos motivos, la detección directa del éter era muy difícil de realizar.

Sin embargo, Michelson (1852 - 1931), físico nacido en Estados Unidos, observó que si fuera posible medir la velocidad de la luz con suficiente precisión, también se podría medir la velocidad de la luz que viaja, para un observador en la Tierra, a favor del éter y compararla con la velocidad de la luz que viaja contra el éter. A partir de estas mediciones, se podría deducir la velocidad del éter. Basado en este principio, Michelson diseñó un interferómetro (ver esquema en la figura 1.13) para detectar el movimiento de la Tierra con respecto al éter. Un haz de luz es separado por una lámina semiplataada. Luego de la separación, cada parte recorre caminos de ida y vuelta distintos, para reunirse nuevamente en la lámina separadora. Si el laboratorio (la Tierra) se mueve con velocidad  $V$  respecto del éter, entonces el tiempo de viaje de ida y vuelta de cada rayo dependerá de  $V$  de manera diferente, ya que recorren caminos distintos. Si suponemos que la dirección del movimiento de la Tierra coincide con la del rayo 2 (ver figura 1.14), entonces respecto de la Tierra el rayo 2 recorre el camino de ida con velocidad  $c - V$  y el camino de vuelta con velocidad  $c + V$ . Por lo tanto, el tiempo de viaje de ida y vuelta del rayo 2 es:

$$\begin{aligned} t_2 &= \frac{l_2}{c - V} + \frac{l_2}{c + V} \\ &= \frac{2l_2/c}{1 - V^2/c^2} \end{aligned} \quad (1.2)$$

El tiempo de viaje de ida y vuelta del rayo 1 se puede calcular más fácilmente en el sistema de coordenadas fijo al éter. Recordemos que en la teoría clásica, los tiempos y las distancias se consideran cantidades invariantes. El recorrido del rayo 1 en el sistema fijo al éter se muestra en la figura 1.15. En el sistema fijo al éter la luz viaja con velocidad  $c$  en todas las direcciones. Los tramos de ida y vuelta demandan cada uno un tiempo  $t_1/2$ ; este tiempo se puede calcular, notando que cada tramo es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyo cateto mayor es  $l_1$  y cuyo cateto menor es  $Vt_1/2$  (ver figura 1.15). Entonces, aplicando el teorema de Pitágoras resulta que:

$$\left(\frac{ct_1}{2}\right)^2 = l_1^2 + \left(\frac{Vt_1}{2}\right)^2 \quad (1.3)$$

De aquí se obtiene:

$$t_1 = \frac{2l_1/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (1.4)$$

De esta manera, la diferencia de tiempos de viaje es:

$$\begin{aligned} \Delta t &= t_2 - t_1 \\ &= \frac{2l_2/c}{1 - V^2/c^2} - \frac{2l_1/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Si se gira el interferómetro en  $90^\circ$  habrá un intercambio entre los rayos 1 y 2, de manera que la diferencia de tiempos cambia a

$$\begin{aligned} \Delta t_{90^\circ} &= t_2 - t_1 \\ &= \frac{2l_2/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{2l_1/c}{1 - v^2/c^2} \end{aligned} \quad (1.6)$$

En la práctica, la dirección del movimiento del laboratorio respecto del éter sería desconocida. Sin embargo, girando el interferómetro paulatinamente se debería poder detectar que el desfase producido por la diferencia de tiempos de viaje varía continuamente entre dos valores extremos. El fenómeno debería evidenciarse a través de un desplazamiento de las franjas de interferencia. El experimento fue realizado por primera vez en 1881 y luego repetido en 1886 junto a Edward Morley (1838-1923), químico nacido en Estados Unidos. En ambos casos el resultado fue nulo, es decir, no se observaron franjas de interferencia. En consecuencia, no se pudo medir la velocidad de la Tierra respecto del éter ni probar la existencia de un sistema inercial privilegiado donde el valor de la velocidad de la luz sea  $c$ . De esta manera, se concluyó que *la luz se propaga en vacío con la misma velocidad en todo sistema de referencia inercial*. Ante los resultados nulos en el experimento de Michelson y Morley, surgieron intentos de explicar estos resultados, como, por ejemplo, las teorías de emisión, en las cuales se postulaba que la luz viaja con velocidad  $c$  en el sistema fijo a su fuente. Sin embargo este tipo de teorías no lograban explicar los resultados de otros experimentos. Otros intentos teóricos dejaban de lado la naturaleza ondulatoria de la luz, postulada por Maxwell y corroborada en el laboratorio en 1887.

En la teoría clásica, la relación entre tiempos y posiciones de dos sistemas inerciales está dada por las transformaciones de Galileo. Supongamos un sistema de referencia inercial  $K$  y otro sistema también unidimensional  $K'$  que se mueve con velocidad constante respecto de  $K$ ; la relación entre posiciones y tiempos de ambos sistemas está dada por:

$$x' = x + vt \quad (1.7)$$

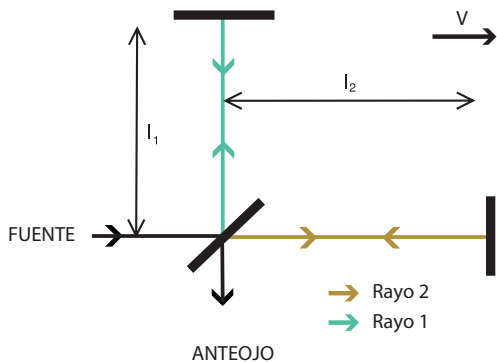
$$t' = t \quad (1.8)$$

Estas transformaciones conducen al teorema de adición de velocidades de Galileo:

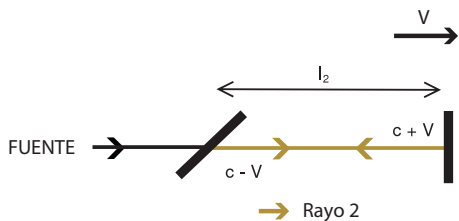
$$v' = v + V \quad (1.9)$$

Albert Einstein (1879 - 1955) pensaba que las leyes de Maxwell son leyes fundamentales de la naturaleza, y que debían entonces formar parte del conjunto de leyes que satisfacen el principio de relatividad de Galileo, es decir, son válidas en todo sistema inercial. Sin embargo, la invariancia de la velocidad de la luz es incompatible con las transformaciones de Galileo. Einstein propuso entonces reemplazar dichas transformaciones y el teorema de adición de velocidades, lo cual implica una nueva noción de espacio y tiempo compatible con la validez de las leyes de Maxwell en todo sistema inercial. Las transformaciones de coordenadas que dejan invariantes las leyes de Maxwell eran conocidas en la época de Eins-

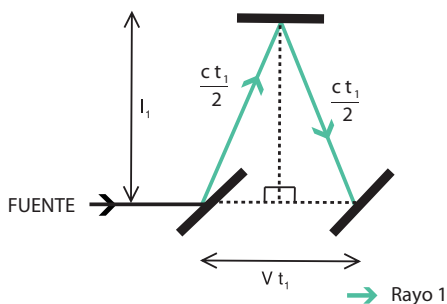




**Figura 1.13.** Esquema del interferómetro de Michelson y Morley. Un haz es separado en dos partes por una lámina semiespejada. Ambas partes recorren caminos de ida y vuelta diferentes, y se reúnen para formar franjas de interferencia localizadas que se observan con un anteojo.



**Figura 1.14.** Marcha del rayo 2 en el sistema del laboratorio.



**Figura 1.15** Marcha del rayo 1 en el sistema fijo al éter.

tein, y se denominan transformaciones de Lorentz (volveremos sobre este punto en el capítulo 6). Este cambio dio lugar a la teoría especial de la relatividad, en cuyo marco los tiempos y longitudes no son invariantes al pasar de un sistema inercial a otro.<sup>3</sup>

Una vez desarrollada la teoría especial de la relatividad, Einstein advirtió que la ley de gravitación de Newton no era invariante ante las transformaciones de Lorentz, debido a que la fuerza entre dos masas depende de la distancia que las separa y ésta no es una cantidad invariante en el marco de la relatividad especial. Einstein hizo algunos intentos, que no resultaron satisfactorios, por formularla de tal modo que resultara invariante respecto de las transformaciones de Lorentz y no de las de Galileo. Finalmente, Einstein se propuso formular una ley de gravitación que tuviera la misma forma en todos los sistemas de referencia, y no solamente en los sistemas de referencia inerciales. Esto dio origen a la teoría general de la relatividad. En esta teoría, un campo gravitatorio no se entiende como un campo de fuerzas, sino como un cambio de la geometría del espacio-tiempo.

La ley de gravitación es diferente de la ley de Newton, en tanto que la forma de la ley es la misma en todos los sistemas de referencia, independientemente de si son inerciales o no. Esto, por cierto, no quiere decir que los fenómenos físicos sean los mismos en todos los sistemas. La forma general de la ley es la misma en todos los sistemas de referencia, pero esta forma general se escribe en función de una cantidad que describe la geometría del espacio-tiempo. Estos conceptos serán desarrollados con todo detalle en los capítulos 6, 7 y 8.

<sup>3</sup>Las dificultades usuales con la relatividad se originan en malas interpretaciones, generalmente debidas a sus aspectos poco intuitivos que en muchos malos libros o publicaciones de divulgación se muestran como paradojas, lo cual sugiere, erróneamente, la posibilidad de contradicciones lógicas en la teoría. Ninguna de las numerosísimas contrastaciones experimentales (directas e indirectas) de la relatividad especial han dado resultados que sugieran la necesidad de reemplazarla por otra descripción de los fenómenos físicos a los cuales se aplica.

---

# 2. Leyes de la dinámica y leyes de conservación

---

---

## □ 2.1. Leyes de la dinámica

---

### 2.1.1 Ley de inercia

---

Para describir el movimiento de un cuerpo, en primer lugar debemos elegir un sistema de referencia. La elección del sistema de referencia siempre es arbitraria, y la descripción del movimiento de un cuerpo respecto de distintos sistemas de referencia será, claro está, diferente. Si el sistema de referencia se halla fijo al mismo cuerpo cuyo movimiento queremos describir, el cuerpo se encontrará en reposo respecto del sistema de referencia elegido, pero se moverá respecto de *otros* sistemas de referencia. A su vez, la trayectoria que sigue el cuerpo será distinta, según los distintos sistemas de referencia. En principio, los diferentes sistemas de referencia son igualmente admisibles en el estudio del movimiento de cualquier cuerpo. Sin embargo, sería deseable que la descripción del movimiento fuera la más sencilla, y por lo tanto es natural elegir el sistema de referencia con este criterio.

Supongamos que un cuerpo se encuentra tan alejado de otros cuerpos que puede considerarse libre de toda interacción con ellos; en otras palabras, este cuerpo se mueve libremente. Si elegimos como sistema de referencia el sistema ligado a dicho cuerpo, respecto de dicho sistema *los movimientos de otros cuerpos libres serán rectilíneos y uniformes*. Esto se conoce como *ley de inercia*. Esta ley fue descubierta por Galileo, y constituye el punto de partida en la construcción de la física, tal como la entendemos hoy.

El sistema de referencia ligado a un cuerpo que se desplaza libremente se denomina *sistema inercial*; la descripción del movimiento de los cuerpos libres, desde tal sistema de referencia, resulta la más simple. En general, en este texto, trabajaremos en sistemas de referencia inerciales, es decir, las leyes que enunciemos serán válidas en dichos sistemas. Señalaremos explícitamente cuando no sea así.

---

### 2.1.2 Relación entre la fuerza y la variación de la velocidad

---

Una vez establecido que el movimiento rectilíneo y uniforme corresponde a la ausencia de interacciones, queda claro que las fuerzas sobre un cuerpo no se relacionan directamente con su velocidad, sino con las *variaciones* de la misma. La pregunta que surge entonces es: ¿cuál es la relación precisa que existe entre la fuerza neta (*la fuerza resultante*) sobre un cuerpo y

la variación de velocidad que el mismo experimenta? Acerca de esto, la experiencia muestra básicamente dos cosas: 1) para producir una dada variación de la velocidad de un cuerpo, la fuerza aplicada sobre el mismo debe ser tanto mayor, cuanto menor es el tiempo durante el que actúa, y 2) para producir una dada variación de la velocidad en un dado tiempo, la fuerza aplicada sobre un cuerpo tiene que ser mayor, cuanto mayor es su masa. Estos dos hechos son consistentes con la ley de Newton que establece la igualdad entre la fuerza resultante o suma de fuerzas  $\Sigma \vec{F}$  y el producto de la masa  $m$  de un cuerpo por su aceleración  $\vec{a} = d\vec{v}/dt$ , donde  $d\vec{v}$  es la variación de la velocidad en el intervalo de tiempo  $dt$ . Es decir:

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a} \quad (2.1)$$

Observemos que la fuerza resultante tiene la dirección y sentido de la variación de la velocidad, y no de la velocidad misma. En el caso particular en que  $\Sigma \vec{F}$  es paralela a la velocidad del cuerpo, entonces  $d\vec{v}$  también lo es, y el resultado es un cambio del módulo de la velocidad, sin variación de la dirección: si llamamos  $F$  al valor de la fuerza resultante, en este caso particular es  $F = mdv/dt$ , donde  $v$  es el valor de la velocidad. Si, en cambio,  $\Sigma \vec{F}$  es perpendicular a la velocidad, entonces  $d\vec{v}$  es perpendicular a  $\vec{v}$ , y por lo tanto, solamente varía la dirección del movimiento (el movimiento es curvilíneo), sin cambiar la rapidez del mismo: si llamamos  $F$  al valor de la resultante, tendremos para este caso que  $F = mv^2/r$ , donde  $r$  es el radio de la curva descrita y  $v^2/r$  es el valor de la aceleración radial o centrípeta.

---

### 2.1.3 Acción y reacción

---

Las variaciones de las velocidades de los cuerpos en interacción mutua no son independientes, sino que están relacionadas. En el caso de un conjunto de dos cuerpos A y B que interactúan solamente entre ellos, la experiencia muestra que las variaciones de velocidad  $d\vec{v}_A$  y  $d\vec{v}_B$  tienen la misma dirección y sentidos opuestos, y el cociente de sus valores absolutos es inversamente proporcional al cociente entre sus masas:  $dv_A/dv_B = m_B/m_A$ . Así, dada la definición de la aceleración como el cociente entre  $d\vec{v}$  y  $dt$ , se tiene que  $m_A\vec{a}_A = -m_B\vec{a}_B$ . Por lo tanto, de acuerdo con lo establecido en la sección anterior, las fuerzas sobre los cuerpos A y B cumplen que:

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B \quad (2.2)$$

Entonces, es imposible ejercer una acción sobre un cuerpo sin recibir una reacción del mismo. Muchas veces este hecho permanece inadvertido. Esto suele ocurrir cuando una de las masas involucradas es mucho mayor que la otra, porque entonces las aceleraciones son muy diferentes, hasta tal punto, que la del cuerpo de mayor masa puede resultar imperceptible.

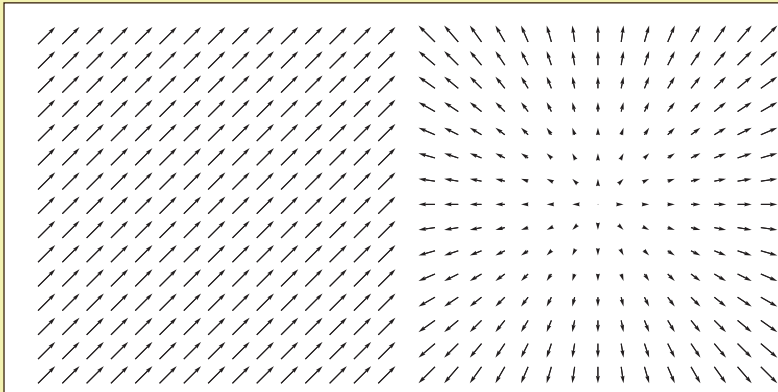
---

### 2.1.4 Unidades

---

Dada la relación existente entre fuerza, masa y aceleración, está claro que las unidades de la fuerza deben ser iguales al producto de las unidades en que se mide la masa por las

unidades en que se mide la aceleración: <sup>4</sup>  $[F] = [m][a]$ . Como la aceleración se mide en unidades de velocidad divididas por unidades de tiempo, entonces  $[F] = [m][v]/[t]$ . Si la masa se mide en kilogramos, la velocidad en metros/segundo y el tiempo en segundos, tenemos que  $[F] = \text{kg m/s}^2$ . Esta unidad de fuerza se denomina *Newton*. Si, en cambio, medimos la masa en gramos, el tiempo en segundos y la velocidad en centímetros/segundo, tenemos que  $[F] = \text{g cm/s}^2$ . Esta unidad se conoce como *dyna*. Observemos que, como  $1\text{m} = 100\text{ cm}$  y  $1\text{ kg} = 1.000\text{ g}$ , entonces  $1\text{ dyna} = 10^{-5}\text{ Newton}$ .



**Figura 2.1.** Izquierda: campo de fuerzas uniforme. Derecha: campo de fuerzas no uniforme  $\vec{F} = (x, y)$ .

## □ 2.2. Energía

### 2.2.1 Trabajo y energía cinética

Supongamos que durante el movimiento de un cuerpo, sobre el mismo actúa una fuerza  $\vec{F}$  dada en cada punto del espacio. El conjunto de todos los vectores fuerza correspondientes a cada punto se suele denominar *campo de fuerzas*. Dichos vectores pueden ser diferentes de un punto a otro del espacio, y además, pueden depender del tiempo, de modo que podemos escribir  $\vec{F} = (F_x(x, y, z, t); F_y(x, y, z, t); F_z(x, y, z, t))$ . En la figura 2.1 izquierda se muestra un ejemplo de un campo de fuerzas uniforme, es decir, cuyo valor, dirección y sentido son los mismos en cada punto. En la figura 2.1 derecha, se muestra un caso más general, donde tanto el valor absoluto como la dirección y sentido del vector correspondiente a cada punto son diferentes. Los dos casos graficados son estáticos, es decir, tales campos de fuerzas no cambian con el tiempo.

Consideremos entonces, el movimiento de un cuerpo de masa  $m$  bajo la acción de un campo  $\vec{F}$ . La magnitud:

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{2.3}$$

<sup>4</sup>Indicamos las unidades de una magnitud  $x$  como  $[x]$ .

donde  $d\vec{r}$  es el vector correspondiente a un desplazamiento muy pequeño (en rigor, infinitesimal) del cuerpo, se define como el trabajo de  $\vec{F}$  en el desplazamiento  $d\vec{r}$ . Como  $\vec{F} \cdot d\vec{r} = F dr \cos \alpha$  donde  $\alpha$  es el ángulo entre la fuerza y el desplazamiento <sup>5</sup>, podemos escribir:

$$dL = F_T dr \quad (2.4)$$

donde  $F_T = F \cos \alpha$  es la proyección de la fuerza en la dirección del desplazamiento. Si  $\vec{F}$  es la única fuerza (o la resultante de fuerzas) que actúa sobre el cuerpo, de acuerdo con las leyes de la dinámica:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (2.5)$$

y como la proyección de la aceleración en la dirección del movimiento es  $dv/dt$ , donde  $v$  es el módulo de la velocidad, entonces:

$$F_T = m \frac{dv}{dt} \quad (2.6)$$

Reemplazando a  $F_T$  en la fórmula (2.4)

$$dL = m \frac{dv}{dt} dr \quad (2.7)$$

de manera que, escribiendo el desplazamiento infinitesimal  $dr$  como  $v dt$ , y cancelando los  $dt$  de numerador y denominador, se obtiene:

$$\begin{aligned} dL &= m dv v \\ &= d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Esto significa que el trabajo es igual a la variación de la magnitud  $\frac{1}{2}mv^2$ , que se denomina *energía cinética*. Así, encontramos otra forma de expresar que la acción de una fuerza se relaciona con la variación de la velocidad de un cuerpo. En particular, de esta manera queda claro que una fuerza perpendicular al desplazamiento no genera variación en el valor de la velocidad (sino solamente en la dirección de la misma). Notemos que, de haber varias fuerzas actuando sobre el mismo cuerpo, su variación de energía cinética vendrá dada por el trabajo de la resultante de dichas fuerzas. Finalmente, observemos que para determinar el trabajo  $L$  en un recorrido no infinitesimal hay que dividir dicho recorrido en desplazamientos infinitesimales y sumar los trabajos asociados con todos esos desplazamientos. Es decir, en general hay que calcular la integral de  $\vec{F}$  a lo largo del camino. Un caso particular en que no es necesario calcular la integral, es el de un campo de fuerzas constante y uniforme, esto es, un campo que no depende del tiempo ni de la posición. Entonces, el trabajo se determina simplemente como el producto  $\vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F\Delta r \cos \alpha$ , donde  $\Delta\vec{r}$  es el desplazamiento total.

---

<sup>5</sup>El producto escalar entre los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  se define, en coordenadas cartesianas, como  $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = AB \cos \alpha$ , donde  $\alpha$  es el ángulo entre ambos vectores.

## 2.2.2 Energía potencial y conservación de la energía

Consideremos ahora el caso particular de un campo de fuerzas que no depende del tiempo (*campo estacionario*)<sup>6</sup>, con la siguiente propiedad, muy importante: si bajo la acción de este campo un cuerpo se desplaza a lo largo de una trayectoria cerrada (es decir que vuelve al punto de partida), el trabajo a lo largo de dicha trayectoria es nulo. Tomemos entonces dos puntos 1 y 2 del espacio, y supongamos que un cuerpo se desplaza bajo la acción de un campo estacionario en una trayectoria cerrada que lo lleva de 1 a 2 por el camino A, y de nuevo a 1, por el camino B (véase la figura 2.2). Evidentemente, podemos escribir:

$$L_{1A2} + L_{2B1} = 0 \quad (2.9)$$

ya que esta suma es el trabajo total en un recorrido de ida y vuelta que empieza y termina en el punto 1. Así, podemos afirmar que  $L_{2B1} = -L_{1A2}$ . Pero por la definición de trabajo, es claro que  $L_{2B1} = -L_{1B2}$ , de donde se deduce que:

$$\begin{aligned} L_{1A2} &= -L_{2B1} \\ &= L_{1B2} \end{aligned} \quad (2.10)$$

es decir, que el trabajo del campo estacionario entre dos puntos dados es independiente del camino considerado. En particular, si uno de esos puntos se elige como el origen, entonces a cada punto  $\vec{r}$  del espacio se puede asignar una cantidad que es igual al trabajo realizado por el campo al llevar al cuerpo desde el origen hasta ese punto. Es usual definir ese trabajo como  $-U(\vec{r})$ , donde  $U(\vec{r})$  es la llamada *energía potencial*. Con esta definición, el trabajo realizado por el campo entre dos puntos cualesquiera será la diferencia de energía potencial entre ellos cambiada de signo:  $L = -\Delta U$ . Para un desplazamiento infinitesimal se tiene que  $dL = -dU$ . De esta manera, si combinamos esta relación con la que establece la igualdad entre el trabajo y la variación de la energía cinética del cuerpo, obtenemos  $-dU = d(mv^2/2)$ , de donde:

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2 + U\right) = 0 \quad (2.11)$$

Entonces, hemos demostrado que para un cuerpo que se mueve bajo la acción de un campo estacionario la magnitud  $\frac{1}{2}mv^2 + U$  permanece constante. Dicha magnitud, que es la suma de la energía potencial y la energía cinética, se llama *energía mecánica*. Designándola como  $E$ , podemos escribir:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + U(\vec{r}) \\ &= \text{constante} \end{aligned} \quad (2.12)$$

que expresa la conservación de la energía para un cuerpo bajo la acción de un campo de fuerzas estacionario. Cuando hay varios cuerpos puntuales en movimiento e interactuando

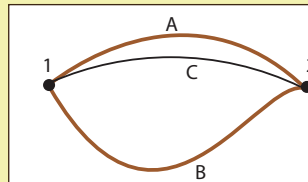


Figura 2.2. Posibles caminos (A,B,C) para ir de 1 a 2.

<sup>6</sup>Un ejemplo conocido de dicha clase de campo es el gravitatorio asociado a un cuerpo en reposo.

solamente entre ellos (los cuerpos forman un *sistema cerrado*), también es válida la ley de conservación de la energía<sup>7</sup>. En ese caso se tiene:

$$E = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \dots + U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots) \\ = \text{constante} \quad (2.13)$$

donde el subíndice indica cada cuerpo del sistema. Es importante en este punto notar lo siguiente: De las relaciones  $dL = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ,  $dL = -dU$  se deduce que la fuerza se obtiene de la energía potencial como  $\vec{F} = -dU/d\vec{r}$ , donde la derivada respecto del vector posición  $\vec{r}$  se entiende, en coordenadas cartesianas, como el vector de componentes iguales a las derivadas respecto de cada coordenada:  $F_x = -dU/dx$ ,  $F_y = -dU/dy$ ;  $F_z = -dU/dz$ . En general, para el caso de varios cuerpos en interacción, se tiene que la fuerza sobre uno de ellos (digamos el *i*-ésimo) está dada por el vector formado por las derivadas, cambiadas de signo, de la energía potencial respecto de las coordenadas del cuerpo dado, dejando las de los demás fijas:

$$\vec{F}_i = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \quad (2.14)$$

Utilizamos la notación  $\partial$  en lugar de la *d* para indicar que la derivada se calcula tomando como variables solamente las coordenadas del cuerpo *i*-ésimo, sin variar las de los demás.

### 2.2.3 Unidades

De acuerdo con su definición, las dimensiones del trabajo y de la energía son iguales. Las unidades en que se las mide se obtienen de reemplazar en sus definiciones las unidades de las magnitudes involucradas. En cualquier caso, las unidades deben ser el producto de unidades de masa por el cuadrado de unidades de velocidad, es decir:  $[L] = [E] = [m][v]^2$ . Si medimos la masa en kilogramos y la velocidad en metros/segundo, entonces  $[L] = [E] = \text{kg m}^2/\text{s}^2$ . Esta unidad se conoce como *Joule*. También es usual medir la masa en gramos y la velocidad en centímetros/segundo. En ese caso se tiene  $[L] = [E] = \text{g cm}^2/\text{s}^2$ , y esta unidad se denomina *ergio*. Como  $1\text{ m} = 100\text{ cm}$  y  $1\text{ kg} = 1.000\text{ g}$ , entonces  $1\text{ ergio} = 10^{-7}\text{ Joule}$ .

### 2.2.4 Movimientos limitados e ilimitados

Supongamos que el movimiento de un cuerpo se encuentra restringido a una sola dirección, de manera que su posición queda definida dando solamente una coordenada. Entonces,

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(x) \quad (2.15)$$

<sup>7</sup> Esto deja de ser cierto, en general, si entre los cuerpos existen interacciones que no pueden asociarse a una energía potencial, como es el caso de las fuerzas disipativas.

y la fuerza sobre el cuerpo se obtiene simplemente como  $F = -dU/dx$ . Como la energía cinética es, dada su definición, siempre mayor o igual que cero, entonces para una dada energía  $E$  (determinada por las condiciones iniciales, esto es, por la velocidad y posición iniciales) el movimiento del cuerpo es posible solamente mientras su posición  $x$  es tal que:

$$U(x) \leq E \quad (2.16)$$

Por lo tanto, dada una función  $U(x)$ , los puntos donde  $E = U$  son *puntos límites* (o *puntos de retorno*) del movimiento, pues en ellos la velocidad es nula. Por ejemplo, supongamos que la energía potencial de un cuerpo que realiza un movimiento a lo largo del eje  $x$  es de la forma que se muestra en la figura 2.3. Entonces, para una energía  $E$  el movimiento sólo es posible entre  $x_1$  y  $x_2$ , o más allá de  $x_3$ , que son los puntos límites. El movimiento entre  $x_1$  y  $x_2$  es limitado<sup>8</sup>, mientras que el movimiento más allá de  $x_3$  es ilimitado, ya que el cuerpo puede alcanzar cualquier distancia desde el origen, mientras la misma sea mayor o igual que la correspondiente a  $x_3$ .

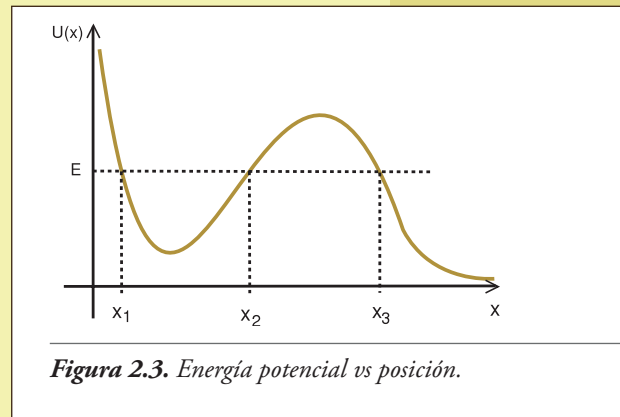


Figura 2.3. Energía potencial vs posición.

- Ejemplo. Como sabemos, los núcleos atómicos están compuestos por protones y neutrones. La energía potencial  $U(r)$  de la interacción entre un núcleo atómico y un protón<sup>9</sup> es de la forma de la figura 2.4, donde  $r$  es la distancia del protón al centro del núcleo, y las unidades de la energía potencial son  $\text{MeV} = 10^6 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ ergio}$ . Queremos analizar qué ocurrirá con un protón que incide sobre el núcleo desde gran distancia (usualmente se dice "desde el infinito").

Recordemos que la energía total es la suma de la energía cinética y la energía potencial. En el infinito la energía potencial se anula, mientras que para penetrar en la región  $r < r_0$ , la energía cinética inicial del protón debe ser mayor que el máximo valor de la energía potencial en esa región: 10 MeV. A su vez, si el protón se encuentra en la región  $r < r_0$ , sólo podrá llegar a la región  $r > r_0$  si su energía inicial es mayor a 10 MeV. Si, por el contrario, su energía es menor que 10 MeV, su movimiento estará limitado por el punto de retorno  $r_0$ . Supongamos ahora que tenemos un protón en  $r = 0$  con energía 20 MeV y queremos determinar cuál es la velocidad que tendrá en  $r = r_0$  y en el infinito. Al llegar a  $r_0$  la energía potencial es de 10 MeV y por lo tanto, como la energía se conserva, la energía cinética es  $E_c = m_p v^2/2 = 10 \text{ MeV}$ . La masa de un protón es de  $m_p = 1,67 \times 10^{-24} \text{ g}$  y  $10 \text{ MeV} = 1,6 \times 10^{-5} \text{ g cm}^2/\text{s}^2$ . Luego:

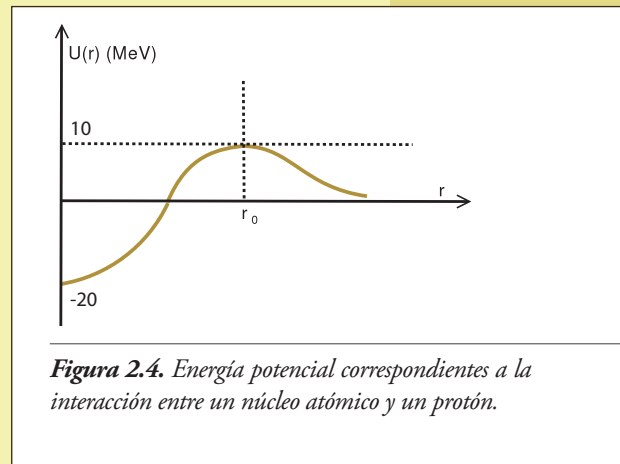


Figura 2.4. Energía potencial correspondientes a la interacción entre un núcleo atómico y un protón.

$$v_p(r_0) = 4,38 \times 10^7 \text{ m/s} \quad (2.17)$$

<sup>8</sup> También se dice finito o ligado.

<sup>9</sup> En realidad el problema es tridimensional, pero puede ser reducido al de un potencial efectivo unidimensional de la forma de la figura 2.4 (véase la sección 5).



A su vez, al llegar al infinito, la energía potencial se anula y toda la energía se convierte en energía cinética; por lo tanto  $E_c = m_p v_p^2/2 = 20 \text{ MeV}$  y:

$$v_p(\infty) = 6,19 \times 10^7 \text{ m/s} \quad (2.18)$$

## 2.2.5 Solución de un problema unidimensional. Ejemplos

En el caso de un movimiento unidimensional es posible resolver directamente el problema de determinar la evolución temporal, sin necesidad de pasar por las ecuaciones de la dinámica. En efecto, de la expresión de la energía (ecuación 2.15), escribiendo  $v = dx/dt$  se obtiene:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2(E - U(x))/m} \quad (2.19)$$

lo cual permite escribir la relación entre el tiempo y un desplazamiento pequeño (infinitesimal):

$$dt = dx \frac{\sqrt{m/2}}{\sqrt{E - U(x)}} \quad (2.20)$$

La evolución completa dada por  $x(t)$  resulta de integrar miembro a miembro esta igualdad.

1. Un caso de mucho interés y para el que resulta sencillo efectuar el cálculo es el de un cuerpo sometido a una fuerza restitutiva proporcional a la distancia a un punto fijo:  $F = -kx$  (el ejemplo más conocido es el de la fuerza elástica). Dicha fuerza se asocia a una energía potencial  $U(x) = kx^2/2$ , de manera que la energía es igual a

$$E = \frac{1}{2}m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad (2.21)$$

La energía potencial es una función cuadrática de  $x$ , de modo que para cualquier valor positivo de la energía el movimiento tendrá lugar entre dos puntos de retorno. Efectuando la integral para  $U(x) = kx^2/2$ , y reordenando el resultado <sup>10</sup>, obtenemos (eligiendo el origen de  $t$  de modo que  $x(t=0) = 0$ ):

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E}{k}} \operatorname{sen} \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \quad (2.22)$$

Este resultado nos permite, en particular, calcular el período; para ello basta con multiplicar por dos el tiempo que tarda el móvil en ir desde un punto de retorno al otro. Dichos puntos están dados por  $E = U(x) = kx^2/2$ , de modo que son  $x = -\sqrt{2E/k}$  y  $x = \sqrt{2E/k}$ . Restando los instantes correspondientes a estas posiciones y multiplicando por dos obtenemos el período:  $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ .

<sup>10</sup>Para el cálculo basta tomar de una tabla de integrales la igualdad.  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsen \frac{x}{a} + \text{constante}$ .

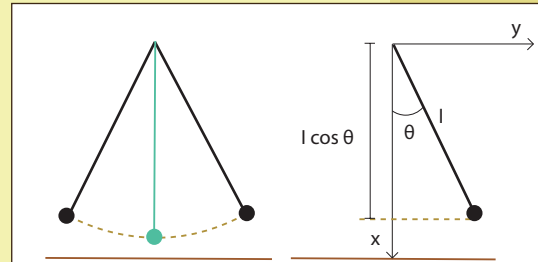
2. Una aplicación inmediata del resultado anterior es el cálculo del período de las oscilaciones pequeñas de un péndulo ideal, esto es, de un cuerpo puntual de masa  $m$ , suspendido de un hilo de longitud  $l$ , que oscila en un plano apartándose poco de la vertical. Si llamamos  $\theta$  al ángulo del hilo con la vertical, la velocidad del cuerpo es  $l \Omega = l \, d\theta/dt$ , donde  $\Omega$  es la velocidad angular; por lo tanto, la energía cinética es  $\frac{1}{2}ml^2(d\theta/dt)^2$ . Si tomamos el punto más bajo de la trayectoria del péndulo (ver figura 2.5) como el nivel en que la energía potencial gravitatoria  $mgy$  se anula, entonces  $U = mg(l-l \cos \theta)$  (ver figura 2.5). Si el ángulo máximo alcanzado en las oscilaciones es pequeño, podemos aproximar  $\sin \theta \approx \theta$ , y usando que  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ , tenemos que  $\cos^2 \theta \approx 1 - \theta^2$ . Pero si  $\theta \ll 1$  (eso quiere decir, justamente, que el ángulo sea pequeño), podemos usar la aproximación  $(1-\varepsilon)^{1/2} \approx 1 - \varepsilon/2$ , de modo que  $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$  y la energía del cuerpo es, aproximadamente:

$$E = \frac{1}{2}ml^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}mgl\theta^2 \quad (2.23)$$

Se ve que, aparte del nombre de la variable ( $\theta$  en lugar de  $x$ ), esta expresión es análoga a la del caso anterior, con la sustitución de  $ml^2$  en lugar de  $m$ , y de  $mgl$  en lugar de  $k$ . Por lo tanto, la solución del problema es simplemente:

$$\theta(t) = \sqrt{\frac{2E}{mgl}} \sin \left( \sqrt{\frac{g}{l}} t \right) \quad (2.24)$$

La analogía con el ejemplo anterior permite hallar de inmediato el período:  $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ . Vemos que -bajo la aproximación de oscilaciones pequeñas- el período solamente depende de la longitud del péndulo y de la gravedad. No depende, en cambio, de la amplitud de las oscilaciones, es decir, del ángulo máximo alcanzado; tampoco depende de la masa del péndulo. Este hecho había sido observado ya por Galileo, mucho antes de que encontrara su explicación, a partir de las leyes de la dinámica o las leyes de conservación.



**Figura 2.5.** Izquierda: Trayectoria del péndulo; en azul el punto más bajo de la trayectoria. Derecha: Definición de  $\theta$ , ángulo entre la vertical y la posición del péndulo.

## □ 2.3. Impulso

El espacio es homogéneo (es decir, todas las posiciones son equivalentes), y por lo tanto, la evolución de un sistema cerrado debe ser independiente de que se traslade al sistema como un todo de una región del espacio a otra. En otras palabras, la evolución de los cuerpos de un sistema cerrado sólo puede depender de sus posiciones relativas. Como la evolución está determinada por las fuerzas sobre los cuerpos, y las fuerzas se obtienen de la energía potencial, para que esta condición se cumpla la energía potencial de un sistema cerrado debe depender solamente de las diferencias entre las coordenadas de los cuerpos del mismo. Consideremos, por simplicidad, el caso de un sistema formado por sólo dos cuerpos.

Entonces: 
$$U = U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (2.25)$$

<sup>11</sup> En general, para  $x$  pequeño  $|x| \ll 1$  una primera aproximación es  $(1+x)^r \approx (1+rx)$ .

Esta forma de la dependencia con las coordenadas tiene una consecuencia importante: como es fácil comprobar, se cumple que:

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_2} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_1} \quad (2.26)$$

de modo que  $-\vec{F}_2 = \vec{F}_1$  (de acuerdo con la ley de acción y reacción), y por lo tanto:

$$-m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} = m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} \quad (2.27)$$

De aquí se desprende que:

$$\frac{d}{dt}(m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) = 0 \quad (2.28)$$

Esto significa que la cantidad: 
$$\vec{P} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \quad (2.29)$$

que llamamos *impulso* o *cantidad de movimiento* del sistema formado por ambos cuerpos se mantiene constante. La extensión de esta definición al caso de un sistema de más de dos cuerpos es inmediata:  $\vec{P} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots$

El cociente entre el impulso y la suma de las masas define una velocidad constante:

$$\vec{V} = \frac{\vec{P}}{m_1 + m_2} \quad (2.30)$$

con la siguiente propiedad evidente: si el movimiento de los dos cuerpos se describe desde un sistema de referencia que se mueve con  $\vec{V}$ , entonces el impulso  $\vec{P}$  es nulo respecto de dicho sistema. Pero como  $m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = d/dt (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2)$ , eso significa que el vector:

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 \quad (2.31)$$

es constante, y por lo tanto puede elegirse el origen del sistema de referencia de manera tal que  $m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0$ . Dicho origen es el del llamado *sistema de referencia del centro de masa*.

## □ 2.4. Impulso angular

Así como la homogeneidad del espacio implica la conservación del impulso para un sistema cerrado, la isotropía (es decir la equivalencia de todas las direcciones) tiene como consecuencia la conservación de otra magnitud vectorial. Dicha magnitud es el impulso angular<sup>12</sup>, que se define para un cuerpo puntual como:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (2.32)$$

<sup>12</sup>También llamado momento angular, *momento cinético* o *cantidad de movimiento angular*.

donde  $\vec{r}$  es el vector posición del cuerpo, respecto de un punto elegido como centro de momentos. El centro de momentos elegido no necesariamente debe coincidir con el origen de coordenadas; el vector  $\vec{M}$  depende de la elección realizada (ver problemas). El símbolo  $\times$  indica el producto vectorial<sup>13</sup> de manera que el valor del impulso angular es igual a  $M = r p \sin\theta$ , donde  $\theta$  es el ángulo entre el vector posición y el vector impulso. Para un sistema de varios cuerpos, la definición se generaliza de manera natural como:

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 + \dots \quad (2.33)$$

donde es usual (y conveniente) tomar como origen el centro de masa del sistema. Consideremos un sistema cerrado formado por dos cuerpos puntuales, de manera que el impulso angular es  $\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2$ , y calculemos su derivada respecto del tiempo:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{d\vec{r}_1}{dt} \times \vec{p}_1 + \vec{r}_1 \times \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{r}_2}{dt} \times \vec{p}_2 + \vec{r}_2 \times \frac{d\vec{p}_2}{dt} \quad (2.34)$$

Como  $d\vec{r}/dt$  es la velocidad  $\vec{v}$  de cada cuerpo, y a su vez  $\vec{p} = m\vec{v}$ , entonces el primer término y el tercero de la suma son nulos, y queda:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{r}_1 \times \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \vec{r}_2 \times \frac{d\vec{p}_2}{dt} \quad (2.35)$$

Pero  $d\vec{p}/dt = m d\vec{v}/dt$  es la fuerza  $\vec{F}$  sobre cada cuerpo ejercida por el otro (recordemos que el sistema es cerrado), de manera que de acuerdo con la ley de acción y reacción (o por la conservación del impulso  $\vec{p}$  del sistema) se tiene  $d\vec{p}_1/dt = \vec{F} = -dp_2/dt$ , y entonces:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{M}}{dt} &= \vec{r}_1 \times \vec{F} + \vec{r}_2 \times (-\vec{F}) \\ &= (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F} \end{aligned} \quad (2.36)$$

Ahora bien, la isotropía del espacio implica que la energía potencial no puede depender de la orientación del sistema en el espacio, sino solamente de la distancia entre los dos cuerpos; así:

$$\begin{aligned} U &= U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \\ &= U(r) \end{aligned} \quad (2.37)$$

donde  $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ . Por lo tanto,  $dU = 0$  para desplazamientos cualesquiera  $d\vec{r}_1$  o  $d\vec{r}_2$  que mantengan constante la distancia  $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ , es decir para  $dr_1$  o  $dr_2$  perpendiculares al vector  $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ . Como  $dU = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$ , esto significa que  $\vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$  para tales desplazamientos, lo cual implica que los vectores  $\vec{F}_1 = \vec{F}$  y  $\vec{F}_2 = -\vec{F}$  son paralelos al vector  $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ . Como consecuencia, el producto vectorial es nulo, y queda demostrado que para un sistema cerrado resulta  $d\vec{M}/dt = 0$ , es decir que  $\vec{M}$  es constante.

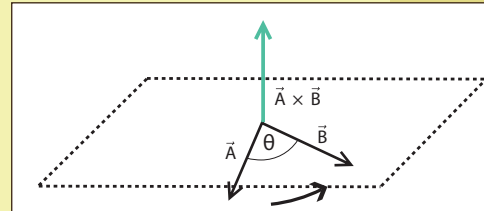


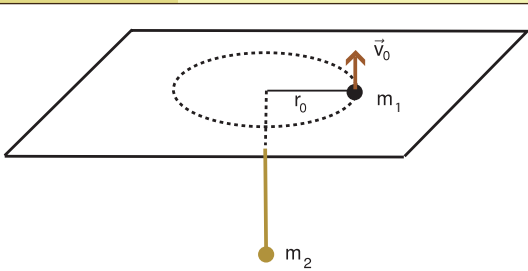
Figura 2.6. Representación gráfica del producto vectorial.

<sup>13</sup> El producto vectorial entre dos vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  se define, en coordenadas cartesianas, como  $\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x)$ , y su valor absoluto es igual a  $AB \sin\theta$ , donde  $\theta$  es el ángulo entre ambos vectores. El vector  $\vec{A} \times \vec{B}$  es perpendicular al plano que contiene a  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , y su sentido puede determinarse por la siguiente regla: si giramos el vector  $\vec{A}$  hacia el  $\vec{B}$  e imaginamos un tornillo que realiza el mismo giro, el sentido de avance del tornillo es el mismo de  $\vec{A} \times \vec{B}$ . Véase la figura 2.6

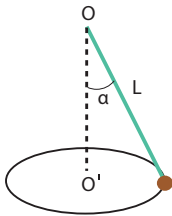
Si se considera el caso de un único cuerpo, la derivada temporal de su impulso angular respecto de un punto dado es simplemente:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (2.38)$$

donde  $\vec{F}$  es la fuerza sobre el cuerpo. La magnitud vectorial  $\vec{r} \times \vec{F}$  se suele llamar *momento* de la fuerza  $\vec{F}$ ; el origen de  $\vec{r}$  se toma en el centro de momentos elegido. La discusión anterior permite inferir que si la fuerza es paralela al vector  $\vec{r}$  entonces  $\vec{M}$  se mantendrá constante. Es claro que, en particular, siempre que la energía potencial sea de la forma  $U(r)$  dicha condición se cumplirá; un campo tal que  $U = U(r)$  se denomina *campo central*.



**Figura 2.7.** Esquema del problema de dos masas unidas por un hilo que pasa por un orificio en una mesa horizontal.



**Figura 2.8.** Péndulo cónico.

## □ Problemas

**Problema 1:** El sistema de la figura 2.7 consiste de dos masas  $m_1$  y  $m_2$  unidas por un hilo inextensible que pasa por un orificio practicado en una mesa horizontal sin rozamiento. En cierto instante, la masa  $m_2$  está en reposo y la masa  $m_1$  se mueve con velocidad tangencial  $v_0$  a una distancia  $r_0$  del orificio. La masa  $m_2$  puede o no continuar en reposo dependiendo de la relación matemática entre  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $v_0$ ,  $r_0$  y  $g$ .

- i) Determinar la relación para que  $m_2$  permanezca en reposo.
- ii) Suponiendo ahora que  $m_2$  tiene velocidad no nula, calcular las velocidades de ambas partículas cuando la masa  $m_2$  ha descendido una distancia  $d$ . Se supone que el hilo tiene una masa mucho más pequeña que  $m_1$  y  $m_2$ .

**Problema 2.** En la figura 2.8 se muestra un péndulo cónico de masa  $m$  y longitud  $L$  que forma un ángulo  $\alpha$  con la dirección vertical. Se quiere analizar si se conserva el impulso angular desde los centros de momentos  $O$  y  $O'$ .

## 2.5. Movimiento en un campo central

### 2.5.1 El problema de dos cuerpos

Consideremos, desde el sistema de referencia del centro de masa, el problema del movimiento de dos cuerpos que sólo interactúan el uno con el otro. Como ya vimos, respecto de ese sistema se tiene

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0 \quad (2.39)$$

y el impulso es nulo:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = 0 \quad (2.40)$$

Por lo tanto, si definimos  $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  y la correspondiente velocidad relativa  $\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ , se obtiene que:

$$\vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \quad \vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r} \quad (2.41)$$

y análogamente:

$$\vec{v}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{v} \quad \vec{v}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v} \quad (2.42)$$

Si reemplazamos estas últimas expresiones en la fórmula de la energía  $E = m_1 v_1^2/2 + m_2 v_2^2/2 + U(r)$  (donde  $r$  es la distancia  $|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$  entre los cuerpos), obtenemos:

$$E = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v^2 + U(r) \quad (2.43)$$

De esta manera, la energía del sistema es igual a la de un solo cuerpo de masa  $m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  moviéndose en un campo exterior de energía potencial  $U(r)$ . Esto simplifica considerablemente el problema de determinar la evolución de los dos cuerpos: basta con resolver el problema de un único cuerpo de masa  $m$  sujeto a una fuerza  $\vec{F} = -dU/d\vec{r}$ , es decir, el problema de un cuerpo en un campo central. Una vez hallada la solución  $\vec{r}(t)$ , la solución del problema original se obtiene a partir de las fórmulas que relacionan dicho vector con las posiciones  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$  de cada cuerpo. Observemos que de dichas fórmulas se deduce que  $r_1/r_2 = m_2/m_1$ , de modo que los dos cuerpos realizan trayectorias semejantes alrededor del centro de masa, con distancias al mismo inversamente proporcionales a sus masas.

## 2.5.2 Energía

Como ya hemos señalado, en el movimiento de un cuerpo puntual en un campo central, es decir asociado a una energía potencial  $U(r)$  donde  $r$  es la distancia al centro del campo, se mantiene constante el vector  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{P}$ . Como  $\vec{M}$  es perpendicular a  $\vec{r}$ , de la constancia de  $\vec{M}$ , deducimos que el vector posición del cuerpo se mantiene en un plano, el perpendicular al impulso angular. Como la trayectoria del cuerpo está contenida en un plano, bastan dos coordenadas para definir su posición. Si se trabaja en coordenadas cartesianas, la posición viene dada por  $x$  e  $y$ , y el cuadrado de la velocidad, necesario para escribir la energía cinética, es igual a  $v^2 = v_x^2 + v_y^2$ . Es más conveniente, sin embargo, trabajar en términos de las coordenadas polares. Definimos  $r$  como la distancia al origen de coordenadas y  $\vartheta$  como el ángulo del vector posición respecto de algún eje cartesiano, por ejemplo el  $x$  (ver figura 2.9). Elegimos el origen de coordenadas en el centro del campo porque es la elección que permite describir el movimiento de manera más simple en el caso de un campo central. De esa manera, el cuadrado de la velocidad es

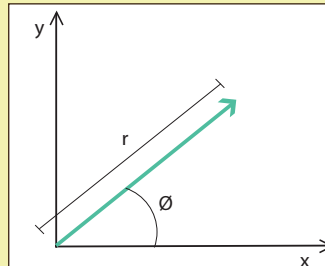


Figura 2.9. Definición de las coordenadas polares  $r$  y  $\vartheta$ .

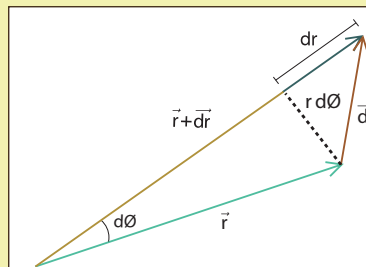
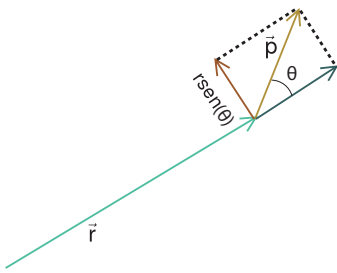


Figura 2.10. Variación infinitesimal del vector  $\vec{r}$ .

$v^2 = v_r^2 + v_t^2$ , donde  $v_r = dr/dt$  es la velocidad radial (correspondiente a la variación de la distancia al centro), y  $v_t = r d\theta/dt = r\Omega$  es la velocidad tangencial ( $\Omega$  es la velocidad angular), que corresponde al desplazamiento perpendicular al vector  $\vec{r}$  (véase la figura 2.10).



**Figura 2.11.** Esquema del producto vectorial  $\vec{r} \times \vec{p}$ ; la proyección de  $\vec{p}$  en la dirección tangencial es proporcional a la velocidad tangencial.

Así, la energía del cuerpo es:

$$E = \frac{1}{2} m \left[ \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] + U(r) \quad (2.44)$$

La expresión  $M = r p \cos \theta$ , con  $\theta$  el ángulo entre el vector posición y el vector impulso  $\vec{p}$ , implica que el valor del impulso angular está dado por el producto entre la distancia al centro y la proyección de  $\vec{p}$  en la dirección perpendicular a  $\vec{r}$ . Pero dicha proyección es  $m v_t = m r d\theta/dt =$  (véase la figura 2.11), de manera que:

$$M = m r^2 \frac{d\theta}{dt} \quad (2.45)$$

Esta relación permite, dada la constancia de  $M$ , eliminar la velocidad angular de la expresión para la energía; en efecto, escribiendo  $d\theta/dt = M/(m r^2)$  y reemplazando, se obtiene:

$$E = \frac{1}{2} m \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{M^2}{2 m r^2} + U(r) \quad (2.46)$$

Es decir que, gracias a la conservación del impulso angular, la energía puede escribirse en términos de solamente la distancia al centro y su derivada respecto del tiempo. La expresión hallada para la energía permite, desde el punto de vista formal, considerar a la parte radial del problema como un movimiento lineal en un campo de energía potencial efectiva:

$$U_{ef}(r) = \frac{M^2}{2 m r^2} + U(r) \quad (2.47)$$

donde el primer término del miembro derecho suele denominarse *energía potencial centrífuga*. Entonces:

$$E = \frac{1}{2} m \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + U_{ef}(r) \quad (2.48)$$

La analogía con el problema unidimensional permite de inmediato deducir que, para una dada energía  $E$  determinada por las condiciones iniciales, el movimiento sólo tendrá lugar en la región del espacio donde  $U_{ef} \leq E$ . Los valores de  $r$  tales que  $U_{ef} = E$  serán los límites del movimiento, en los cuales la velocidad radial  $dr/dt$  se anula. Por supuesto, eso no significa que el cuerpo se encuentre instantáneamente en reposo, pues la constancia de  $M$  implica que la velocidad angular  $\Omega = d\theta/dt$  no se anula (y por lo tanto tampoco cambia de signo).

## 2.5.3 Caída al centro

El hecho de que uno de los términos del potencial efectivo se haga ilimitadamente grande cuando se reduce la distancia al centro, hace que no sea siempre posible para el cuerpo alcanzar dicho punto, aún cuando el campo central sea atractivo. ¿Cuándo será posible para un cuerpo alcanzar el centro? La pregunta puede formularse de manera más precisa: se trata de hallar qué comportamiento con la distancia al centro debe tener una energía potencial asociada a un campo atractivo para que sea posible que el cuerpo alcance  $r = 0$ . La solución se obtiene a partir de que:

$$\frac{1}{2} m \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 = E - \frac{M^2}{2mr^2} - U(r) > 0 \quad (2.49)$$

de modo que

$$r^2 U(r) + \frac{M^2}{2m} < E r^2 \quad (2.50)$$

Pero el miembro derecho de esta desigualdad tiende a cero cuando la distancia al centro tiende a cero. Por lo tanto, para que sea posible alcanzar el centro, la cantidad  $r^2 U(r)$  debería ser negativa y de valor absoluto mayor que  $M^2/2m$ ; esta condición se cumple si  $U(r)$  es de la forma  $-\alpha/r^2$  con  $\alpha$  positivo y de valor mayor que  $M^2/2m$ , o si  $U(r)$  es de la forma  $-1/r^p$  con  $p$  mayor que 2.

## 2.5.4 Velocidad areolar y segunda ley de Kepler

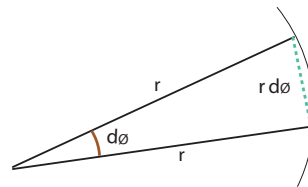
La conservación del impulso angular y, en particular, la de su valor, admite una interpretación sencilla. En efecto, si observamos que durante un desplazamiento infinitesimal asociado con un ángulo  $d\theta$  el vector posición barre un sector de área  $dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$  (véase la figura 2.12), entonces es natural definir el cociente entre esa área y el tiempo como la *velocidad areolar*.

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} \quad (2.51)$$

de manera que el valor del impulso angular  $M = mr^2 d\theta/dt$  se puede escribir como:

$$M = 2m \frac{dA}{dt} \quad (2.52)$$

Así, la conservación del impulso angular se asocia con la constancia de la velocidad areolar, esto es, con el hecho de que la posición de un cuerpo en un campo central barre áreas iguales en tiempo iguales. Es interesante notar que, en el caso del movimiento de los planetas alrededor del Sol, este hecho fue ya observado por Kepler (ver cap. 1) y en ese contexto se lo conoce como la segunda ley de Kepler del movimiento planetario.



**Figura 2.12.** Variación infinitesimal del vector  $\vec{r}$  debida solamente a una variación infinitesimal en el ángulo  $\theta$ .



## 2.5.5 Trayectoria

La descripción del movimiento de un cuerpo en un campo central se puede obtener directamente de las leyes de conservación. Como ya hemos señalado, la conservación del impulso angular permite dos simplificaciones importantes del problema: primero, conduce a reducir el número de coordenadas necesarias a solamente dos; segundo, escribiendo la velocidad angular  $d\vartheta/dt$  en términos de la distancia al centro, conduce a la analogía formal de la energía con la de un movimiento unidimensional con un potencial efectivo. Este punto es clave, ya que de la expresión para la energía  $E$  (ecuación 2.46) puede despejarse la velocidad radial:

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(r)) - \frac{M^2}{m^2 r^2}} \quad (2.53)$$

y de aquí se obtiene de inmediato la relación entre una variación infinitesimal de la distancia al centro y el tiempo:

$$dt = dr \frac{\sqrt{\frac{m}{2}}}{\sqrt{E - U(r) - M^2/2mr^2}} \quad (2.54)$$

Para obtener la distancia  $r(t)$  para todo tiempo es necesario conocer la forma de la energía potencial  $U(r)$ , e integrar miembro a miembro la ecuación anterior. En general, tal como se demostró más arriba, el movimiento tendrá lugar en la región del plano tal que  $E \geq U(r) + M^2/2mr^2$ . Si esta condición se cumple para distancias cualesquiera mayores que un cierto valor, el movimiento será ilimitado (ya que esperando suficiente tiempo el cuerpo alcanzará cualquier distancia al centro). En cambio, si dicha condición se cumple para un rango finito de valores de  $r$ , esto es para  $r_1 \leq r \leq r_2$ , entonces el movimiento es limitado (o acotado), y la trayectoria estará contenida en una corona circular de radios  $r_1$  y  $r_2$ .

La relación entre el ángulo  $\vartheta$  y el tiempo puede obtenerse, si ya se obtuvo la distancia al centro en función del tiempo, reemplazando la forma explícita de  $r(t)$  en la expresión del impulso angular  $M = mr^2 d\vartheta/dt$ , e integrando la ecuación resultante:

$$d\vartheta = \frac{M}{m} \frac{dt}{r^2(t)} \quad (2.55)$$

Si solamente nos interesa la trayectoria (es decir, la ecuación de la curva que el cuerpo describe en el espacio), la relación entre el ángulo  $\vartheta$  y la distancia  $r$  al centro puede obtenerse reemplazando  $dt = mr^2 d\vartheta/M$  en la expresión que relaciona  $dt$  con  $dr$ . Un reordenamiento sencillo de lo que resulta conduce a la igualdad:

$$d\vartheta = \frac{M dr}{r^2 \sqrt{2m(E - U(r)) - M^2/r^2}} \quad (2.56)$$

que relaciona una variación infinitesimal del ángulo con la variación de la distancia al centro. La integración miembro a miembro de esta ecuación da como resultado el ángulo  $\vartheta$  en función de la distancia  $r$ , esto es, la ecuación de la trayectoria  $\vartheta(r)$ . Para efectuar dicha integración debe conocerse, claro está, la forma de la energía potencial.

# 3. La ley de Newton de la gravitación

## □ 3.1. Forma de la ley de la gravitación

Es sabido que la fuerza gravitatoria entre dos cuerpos puntuales es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa. Además dicha fuerza es atractiva, es decir, tiende a aproximar los cuerpos y no a separarlos. Mostraremos ahora que la ley que establece dicha dependencia con las masas y la distancia puede justificarse mediante los siguientes argumentos, que se basan en la mecánica fundada por Galileo y Newton, y en la descripción de Kepler del movimiento de los planetas <sup>14</sup>.

1. De acuerdo con las leyes de Newton de la dinámica, la fuerza resultante  $\vec{F}$  sobre un cuerpo de masa  $m$  es igual al producto de dicha masa por la aceleración que adquiere el cuerpo. Ahora bien, Galileo señaló que la aceleración que adquiere un cuerpo bajo la acción de la gravedad de la Tierra es independiente de la masa del cuerpo. Esto nos lleva a una *primera conclusión*: para que sean compatibles las leyes de la dinámica y la independencia de la aceleración respecto de la masa, la fuerza de gravedad sobre un cuerpo debe ser proporcional a la masa del mismo, es decir:

$$F \propto m \quad (3.1)$$

(el símbolo  $\propto$  significa "proporcional a"), pues de este modo la masa aparece en ambos miembros de la ley  $\vec{F} = m\vec{a}$  y se cancela.

2. Por otro lado, de acuerdo con las leyes de la dinámica las fuerzas entre dos cuerpos A y B que sólo interactúan entre ellos son de igual módulo e igual dirección, y de sentido opuesto. Si aplicamos esto a dos cuerpos que interactúan sólo gravitatoriamente, entonces los valores  $F_A$  y  $F_B$  de las fuerzas que actúan sobre A y B deben cumplir:

$$m_A \propto F_A = F_B \propto m_B \quad (3.2)$$

De aquí se desprende inevitablemente una *segunda conclusión*: el valor de la fuerza gravitatoria entre dos cuerpos A y B debe ser proporcional al producto de las masas de ambos:

$$F \propto m_A m_B \quad (3.3)$$

<sup>14</sup> El trabajo de Kepler se basa, en parte, en las observaciones de Tycho Brahe.

3. Kepler observó que el cuadrado del período  $T$  de la órbita de un planeta alrededor del Sol es proporcional al cubo de su distancia<sup>15</sup> al mismo. Si, como hizo Newton, se establece como hipótesis que el movimiento de los planetas alrededor del Sol y la caída de los cuerpos hacia la Tierra son el mismo tipo de fenómeno, ambos deben entonces obedecer a las mismas leyes. La aplicación de las leyes de la dinámica a un movimiento circular del cuerpo B alrededor del A (supongamos  $m_B \ll m_A$  para poder considerar al cuerpo A en reposo; esto constituye una buena aproximación en el caso de cualquier planeta alrededor del Sol) nos da para el valor de la fuerza:

$$F = m_B \Omega^2 r \quad (3.4)$$

donde  $\Omega$  es la velocidad angular de B y  $r$  es el radio de su trayectoria. Es natural suponer, por otra parte, que la fuerza gravitatoria entre A y B depende de la distancia entre los mismos. La dependencia más sencilla que se puede proponer como modelo, teniendo en cuenta la segunda conclusión  $F \propto m_A m_B$ , es:

$$F \propto m_A m_B r^p \quad (3.5)$$

donde  $p$  es un exponente a determinar. De esta manera:

$$m_B \Omega^2 r \propto m_A m_B r^p \quad (3.6)$$

de donde:

$$\Omega^2 \propto m_A r^{p-1} \quad (3.7)$$

Como la velocidad angular es igual a  $2\pi/T$ :

$$T^2 \propto \frac{(2\pi)^2}{m_A} r^{1-p} \quad (3.8)$$

De acuerdo con la ley de Kepler que establece que  $T^2 \propto r^3$ , entonces se debe cumplir que  $1 - p = 3$ , es decir  $p = -2$ . La conclusión final es que la fuerza gravitatoria entre dos cuerpos puntuales (o esféricamente simétricos<sup>16</sup>) debe obedecer a la ley:

$$F \propto \frac{m_A m_B}{r^2} \quad (3.9)$$

Esta dependencia inversa de la fuerza con el cuadrado de la distancia entre los cuerpos, y su dependencia directa con el producto de sus masas, es lo que se conoce como *ley de Newton de la gravitación*.

---

## □ 3.2. La constante universal de la gravitación

---

Está claro que para que la ley de la gravitación involucre las dimensiones correctas (de fuerza), hay que agregar una constante de proporcionalidad con las dimensiones adecuadas. Entonces, escribimos:

---

<sup>15</sup> Con más precisión, al cubo del semieje mayor de la elipse que describe; la mayor parte de los planetas describen órbitas que no difieren mucho de circunferencias, de modo que la distancia al Sol varía poco. Esto se explicará con detalle en el capítulo siguiente.

<sup>16</sup> En el caso de cuerpos esféricamente simétricos la distancia es la que hay entre sus centros.

$$F = -G \frac{m_A m_B}{r^2} \quad (3.10)$$

donde el signo negativo indica que la fuerza es atractiva. De esta manera, si se ubica un eje radial con su origen en uno de los cuerpos, el signo negativo corresponde a que la fuerza sobre el otro cuerpo apunta en el sentido en que la distancia  $r$  al primero disminuye. La constante  $G$  se suele denominar "constante universal de la gravitación", y su valor determina la intensidad de la atracción gravitatoria.

Si indicamos, como es usual, las unidades de una magnitud en la forma [magnitud], entonces [fuerza] = N(Newton), [masa] = kg, [distancia] = m, y por lo tanto:

$$[G] = \frac{[\text{fuerza}][\text{distancia}]^2}{[\text{masa}]^2} = \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \quad (3.11)$$

Como lo muestra la experiencia cotidiana, la magnitud de  $G$  debe ser muy pequeña. De lo contrario, observaríamos todo el tiempo que cuerpos de masas no necesariamente grandes desvían perceptiblemente las trayectorias de otros cuerpos. En efecto, el valor (aproximado) de la constante universal de la gravitación es:

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \quad (3.12)$$

Este valor se determinó por primera vez entre los años 1797 y 1798, utilizando una balanza de torsión y cuatro esferas. Una forma de apreciar la magnitud de  $G$  es notar que, por ejemplo, la fuerza entre dos cuerpos esféricos de masa 1 kg separados por una distancia de 1m es de  $6,67 \times 10^{-11}$ N. En general, la fuerza gravitatoria producida por un cuerpo es fácilmente medible sólo cuando su masa es considerable, como es el caso, por ejemplo, del Sol, los planetas y sus satélites naturales, o cuando las distancias involucradas son muy pequeñas.

---

## □ 3.3. Ejemplos

---

### 3.3.1 La "influencia de los planetas"

---

Para apreciar de manera clara el significado de la dependencia inversa de la fuerza con el cuadrado de la distancia, analicemos lo siguiente: Algunas personas sostienen la creencia de que las posiciones de los planetas en el instante en que un niño nace influyen sobre su vida. A veces, incluso, se sostiene que justamente la gravedad, por actuar a distancia, podría explicar esa influencia. Veamos entonces si esa afirmación supera una verificación basada en las leyes de la física. Para eso, partimos de que, si la supuesta influencia es tan determinante como se argumenta, entonces debería ser más importante que otras influencias fortuitas que pudieran hacerla irrelevante. En particular, la influencia de Neptuno, por mencionar cualquier planeta, debería ser mayor que la que puede tener un médico que asiste a la madre en el momento del nacimiento; de lo contrario, la posición del médico sería más importante que la de Neptuno, y tomar en cuenta su influencia dejaría de tener sentido. Calculemos entonces la fuerza  $F_M$  que ejerce un médico de masa  $m_M$  del orden de 100 kg situado a una distancia  $r_M$  de medio metro del bebé recién nacido, y compáremosla con la

fuerza  $F_N$  que ejerce el planeta Neptuno, de masa  $M_N$  aproximadamente igual a  $1,03 \times 10^{26}$  kg, y situado a una distancia media aproximada de la Tierra, digamos  $r_N$ , igual a  $4,5 \times 10^{12}$  m. Para eso se puede estimar el cociente entre la fuerza que ejerce el médico y la que ejerce Neptuno:

$$\frac{F_M}{F_N} = \frac{m_M r_N^2}{m_N r_M^2} = \frac{100(4,5 \times 10^{12})^2}{1,03 \times 10^{26}(0,5)^2} \simeq 78,6 \quad (3.13)$$

(la masa del bebé, la constante  $G$  y las unidades se cancelan porque aparecen en ambas fuerzas). El resultado nos dice que la fuerza de gravedad ejercida sobre el bebé por el médico es más de 78 veces mayor que la que ejerce el planeta Neptuno; o, dicho de otra manera equivalente, la influencia gravitatoria de Neptuno es más de 78 veces más débil que la del médico. La conclusión acerca de la importancia de la posición de los planetas en el instante del nacimiento es entonces evidente.

### 3.3.2 El primer astronauta

Para tener una idea de los valores de las magnitudes involucradas en el movimiento bajo la acción de la atracción gravitatoria analizaremos en forma aproximada la órbita del primer astronauta, el ruso Yuri Gagarin. Gagarin realizó el primer viaje espacial de la historia el 12 de abril del año 1961<sup>17</sup>. Viajó a bordo de la nave rusa Vostok 1 en una órbita alrededor de la Tierra; fue lanzado desde el cosmódromo de Baikonur y regresó a tierra en Siberia. A partir del dato de la altura media  $d$  de Gagarin sobre la superficie terrestre (aproximadamente 315 km), estimaremos la velocidad a la que debió viajar alrededor de nuestro planeta. Si hacemos la aproximación de considerar que la órbita fue circular, entonces podemos igualar la fuerza de gravedad de la Tierra sobre la nave a su masa multiplicada por su aceleración centrípeta  $\Omega^2 r = v^2/r$ , donde  $v$  es la velocidad buscada y  $r$  el radio de la trayectoria. Como la masa aparece en ambos miembros de la igualdad, se cancela y queda:

$$\frac{Gm_T}{r^2} = \frac{v^2}{r} \quad (3.14)$$

donde  $m_T \approx 6 \times 10^{24}$  kg es la masa de la Tierra. Si reemplazamos los valores de  $G$  y del radio  $r = R_T + d \approx 6.700$  km (no hay que olvidar que el radio de la órbita es el radio terrestre  $R_T$  más la altura  $d$ ), el cálculo da:

$$v \simeq 7.728 \frac{\text{m}}{\text{s}} \simeq 27.800 \frac{\text{km}}{\text{h}} \quad (3.15)$$

Como vemos, la velocidad de Gagarin en su viaje orbital fue considerable: unas 100 veces mayor que la de un automóvil deportivo, y unas 30 veces mayor que la de un avión de pasajeros.

## □ 3.4. Fuerza en el interior de una esfera

Consideremos un cuerpo esféricamente simétrico de masa  $m'$  y radio  $R$ . Si se quiere calcular

<sup>17</sup>La primera mujer astronauta fue la rusa Valentina Tereshkova, que realizó su primer viaje el 16 de junio de 1963 en la nave Vostok 6.

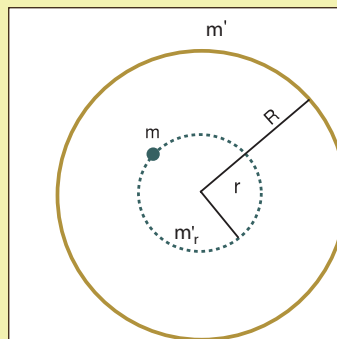
la fuerza que actúa sobre un cuerpo de masa  $m$  situado en su interior, no es válido usar la fórmula de más arriba, porque no toda la masa  $m'$  se encuentra dentro de una esfera de radio menor que la distancia de la masa  $m$  al centro (véase la figura 3.1). Si dicha distancia es  $r$ , la expresión correcta de la fuerza en ese caso es:

$$F = -G \frac{m'_r m}{r^2} \quad (3.16)$$

donde  $m'_r$  es la masa parcial del cuerpo de masa total  $m'$  que hay en una esfera de radio  $r$ . Por ejemplo, si la densidad del cuerpo es constante:  $\rho = m'/\text{Volumen} = m'/(4/3\pi R^3)$ , entonces

$$F = -\frac{4}{3}\pi G m p r \quad (3.17)$$

de modo que el valor de la fuerza crece con la distancia al centro (hasta alcanzar el borde, donde el valor coincide con el que se obtiene con la fórmula válida para el exterior poniendo  $r = R$ ). En el caso en que la masa  $m$  se ubicara en el centro ( $r = 0$ ) la fuerza sería nula; esto es esperable, dado que en esa situación no hay ninguna dirección privilegiada en la que pudiera apuntar una fuerza.



**Figura 3.1.**

### □ 3.5. Energía potencial gravitatoria

A la fuerza gravitatoria se puede asociar la correspondiente energía potencial  $U$ . Dicha energía debe ser tal que su derivada respecto de la coordenada radial sea igual a la fuerza cambiada de signo:

$$-G \frac{m' m}{r^2} = -\frac{dU}{dr} \quad (3.18)$$

Por lo tanto:

$$U(r) = -G \frac{m' m}{r} + \text{constante} \quad (3.19)$$

Es usual elegir la constante de manera que cuando los cuerpos se alejan infinitamente la energía potencial es nula; por lo tanto se suele elegir constante = 0, de modo que:

$$U(r) = -G \frac{m' m}{r} \quad (3.20)$$

Por supuesto, cualquier elección arbitraria da como resultado el mismo valor de la fuerza, ya que la derivada de una constante es cero.

Si se quiere definir la energía potencial gravitatoria para un cuerpo (supongamos puntual) de masa  $m$  en el interior de otro cuerpo esféricamente simétrico, de densidad  $\rho$  y radio

R, hay que partir de la expresión de la fuerza para la misma situación:  $F = -\frac{4}{3} \pi G m \rho r$ . La energía potencial tal que, derivada respecto de  $r$  y cambiada de signo da dicha fuerza, es:

$$U(r < R) = \frac{2}{3} \pi G m \rho r^2 + \text{constante} \quad (3.21)$$

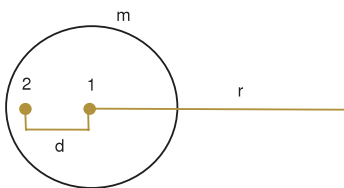
Aquí la constante debe elegirse de manera que esta expresión, evaluada en la superficie (es decir, sustituyendo  $r = R$ ), de lo mismo que la expresión para el exterior cuando la misma también se evalúa en  $r = R$ . El cálculo es sencillo y da como resultado:

$$U(r < R) = \frac{2}{3} \pi G m \rho r^2 - 2\pi G m \rho R^2 \quad (3.22)$$

Recordemos que esta expresión es válida bajo la hipótesis de una densidad  $\rho$  uniforme. Si esto no se cumple, el cálculo requiere de una integración que, de todos modos, resulta sencilla si  $\rho$  solamente depende de la distancia al centro.

### □ 3.6. Fuerza de marea (1)

Si un cuerpo extenso (o un conjunto de cuerpos) se encuentra sometido a la fuerza gravitatoria, las fuerzas sobre cada una de sus partes de igual masa no serán, en general, iguales. Para fijar ideas, consideremos un cuerpo extenso cuyo centro de gravedad<sup>18</sup> se encuentra situado a una distancia  $r$  del centro del campo gravitatorio generado por otro de masa  $m$ , y tomemos dos masas pequeñas  $dm$  que ocupan volúmenes pequeños  $dV$ , los cuales están situados en dos posiciones diferentes: El primero (1) se encuentra en el centro de gravedad del cuerpo extenso; el segundo (2) se encuentra a una distancia  $d$  del centro del cuerpo, sobre el eje que pasa por su centro y el centro del campo, de modo que la distancia a este último es  $r + d$  (ver figura 3.2). Entonces, la fuerza sobre cada una de las partes consideradas es:



$$F_1 = -G \frac{m'dm}{r^2}$$

$$F_2 = -G \frac{m'dm}{(r + d)^2} \quad (3.23)$$

$$= -G \frac{m'dm}{r^2(1 + d/r)^2} \quad (3.24)$$

**Figura 3.2.** La fuerza gravitatoria que ejerce un cuerpo de masa  $m$  sobre un cuerpo extenso es distinta en 1 y 2.

Es claro que  $F_1 > F_2$ ; la diferencia entre la fuerza en distintos puntos suele llamarse *fuerza de marea*<sup>19</sup>. Si el cuerpo no se mantuviera unido por la acción de fuerzas internas, cada una de estas partes adquiriría aceleraciones diferentes,

<sup>18</sup> El centro de gravedad es la posición donde se puede considerar actuando la fuerza de gravedad neta sobre el cuerpo.

<sup>19</sup> A veces ese nombre se utiliza para otra magnitud que involucra también a la fuerza centrífuga; véase más adelante.

lo cual podría llevar al cuerpo a disgregarse. Por ejemplo, la aceleración de la masa en (1) sería igual a  $-Gm'/r^2$ , mientras que la de la masa en (2) sería igual a  $-Gm'/(r+d)^2$ , lo cual tendría como consecuencia una aceleración relativa  $a_R$  (es decir de una parte referida a la otra) dada por:

$$a_R = -Gm' \left( \frac{1}{(r+d)^2} - \frac{1}{r^2} \right) \quad (3.25)$$

Como la aceleración de (1) hacia el centro es de valor absoluto mayor que la de (2), entonces ambas partes tienden a separarse. Por otro lado, la expresión de la aceleración relativa puede reescribirse como:

$$a_R = G \frac{m'}{r^2} \left( 1 - \frac{1}{(1+d/r)^2} \right) \quad (3.26)$$

Por lo tanto, en el caso en que  $d \ll r$  podemos escribir  $(1 + \frac{d}{r})^{-2} \approx (1 - 2d/r)$ , y al reemplazar en la fórmula anterior se obtiene:

$$a_R \simeq 2G \frac{m'd}{r^3} \quad (3.27)$$

El cociente  $d/r^3$  hace que en este caso particular la aceleración relativa resulte pequeña. Sin embargo, eso no quiere decir que los efectos de la fuerza de marea, aún cuando  $d \ll r$ , puedan despreciarse. Más adelante discutiremos esto en un ejemplo en el que incluiremos el efecto de la rotación alrededor de un planeta.

---

## □ 3.7. Alturas pequeñas

---

### 3.7.1 Gravedad en la superficie

---

Bajo ciertas condiciones el movimiento de un cuerpo en un campo gravitatorio admite una descripción muy sencilla. Un ejemplo de ello es el de un cuerpo que se mueve a una altura pequeña por encima de la superficie de un planeta. En ese caso, las expresiones de la energía potencial y la fuerza sobre el cuerpo se simplifican considerablemente, y el estudio del movimiento puede realizarse recurriendo a herramientas matemáticas elementales.

La fuerza gravitatoria que actúa sobre un cuerpo de masa  $m$  situado sobre la superficie de un planeta esféricamente simétrico de radio  $R$  y masa  $m'$  es:

$$F = -G \frac{m'm}{R^2} \quad (3.28)$$

ya que en esa situación se tiene  $r = R$ . Si, de acuerdo con las leyes de la dinámica, igualamos esta fuerza con el producto de la masa del cuerpo por su aceleración  $a$ , tenemos que la masa  $m$  se cancela y queda:



$$a = -G \frac{m'}{R^2} \quad (3.29)$$

Como esta aceleración es el resultado de la fuerza gravitatoria, se la llama *aceleración de la gravedad*, y su valor se denota con la letra  $g$ , es decir que:

$$g = G \frac{m'}{R^2} \quad (3.30)$$

En el caso del planeta Tierra, la aceleración de un cuerpo muy cerca de la superficie se obtiene reemplazando los valores de la masa de la Tierra, su radio y la constante de la gravitación. El resultado (bien conocido) es que  $g$  en la superficie terrestre vale aproximadamente  $9,81 \text{ m/s}^2$ . El valor aproximado de la gravedad en la superficie de cada uno de los planetas del sistema solar se muestra en la siguiente tabla:

Planeta	$g \text{ (m/s}^2\text{)}$
Mercurio	3,73
Venus	7,95
Tierra	9,81
Marte	3,73
Júpiter	24,92
Saturno	10,59
Urano	8,93
Neptuno	11,67
Plutón	0,78

En cuanto a los satélites del sistema solar, señalemos, por ejemplo, que el valor de la gravedad en la superficie de la Luna es aproximadamente un sexto del valor en la superficie terrestre.

## □ Problema 1

Teniendo en cuenta que la distancia media de la Tierra al Sol es de 150 millones de kilómetros, se propone estimar la gravedad en la superficie del Sol (sin utilizar como dato la masa del Sol ni la constante  $G$ , pero teniendo en cuenta que la Tierra tarda un año en describir una órbita, y que la forma de la misma puede aproximarse a la de una circunferencia). El radio aproximado del Sol es de  $695.000 \text{ km}$ .

## 3.7.2 Energía potencial

Como hemos discutido, la energía potencial de un cuerpo de masa  $m$  en interacción con un planeta esférico de masa  $M_p$ , a una distancia  $r$  del centro del mismo, es:

$$U(r) = -G \frac{mM_p}{r} \quad (3.31)$$

Supongamos que el planeta tiene un radio  $R$ . Entonces, podemos escribir la distancia  $r$  al centro como la suma de  $R$  y la distancia  $y$  del cuerpo a la superficie del planeta,  $r = R + y$ , de modo que la energía potencial puede escribirse en términos de  $y$ :

$$U(y) = -G \frac{mM_p}{R + y} \quad (3.32)$$

Esta expresión puede reescribirse para el caso en que la distancia  $y$  sea mucho menor que el radio  $R$  (de modo que  $y/R \ll 1$ ) usando la aproximación  $(1+\epsilon)^{-1} \approx 1-\epsilon$ , válida para  $\epsilon \ll 1$ . Así:

$$\begin{aligned}
U(y) &= -G \frac{mM_p}{R + y} \\
&= -G \frac{mM_p}{R (1 + y/R)} \\
&= -G \frac{mM_p}{R} \left(1 + \frac{y}{R}\right)^{-1} \\
&\simeq -G \frac{mM_p}{R} \left(1 - \frac{y}{R}\right)
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Ahora bien: de acuerdo con lo visto en la sección anterior, el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de un planeta es  $g = GM_p/R^2$ ; de aquí se tiene que  $GM_p/R = gR$  y, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
U(y) &\simeq -mgR \left(1 - \frac{y}{R}\right) \\
&\simeq -mgR + mgy \\
&\simeq mgy + c \text{ constante}
\end{aligned} \tag{3.34}$$

De esta manera, hemos obtenido la expresión usual para la energía potencial gravitatoria de un cuerpo de masa  $m$  que se encuentra a una altura pequeña  $y$  por encima de la superficie de un planeta. El cálculo desarrollado muestra con precisión lo que se debe entender por una altura "pequeña": y debe ser mucho menor que el radio del planeta para que se pueda emplear la forma usual  $mgy + \text{constante}$  para la energía potencial.

---

### 3.7.3 Movimiento parabólico

---

La expresión obtenida para la energía potencial conduce inmediatamente a la fuerza peso sobre un cuerpo a baja altura: en efecto, de la relación entre fuerza y energía potencial  $\vec{F} = -\frac{dU}{d\vec{r}}$  se tiene, para el caso en que  $U = U(y)$ , que la fuerza gravitatoria (peso) tiene solamente una componente vertical  $F = -\frac{dU}{dy}$  de sentido opuesto al sentido en que crece la altura  $y$ :

$$F = -mg \tag{3.35}$$

Se vuelve a obtener así la fórmula que da el peso de un cuerpo de masa  $m$  sobre la superficie de un planeta. De esta fórmula se desprende que solamente la componente vertical (es decir, perpendicular a la superficie) de la aceleración del cuerpo es no nula <sup>20</sup> (en otras palabras, solamente la componente vertical de la velocidad cambia con el tiempo):

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= (0, a_y, 0) & a_y &= \frac{F}{m} \\
& & a_y &= -g
\end{aligned} \tag{3.36}$$

---

<sup>20</sup> Suponiendo que no actúan otras fuerzas sobre el cuerpo.

Como la aceleración, en este caso, es un vector constante, se tiene  $\vec{a} = \Delta\vec{v}/\Delta t = (\vec{v} - \vec{v}_0)/(t - t_0)$ , donde  $\vec{v}_0$  es la velocidad correspondiente al instante inicial  $t_0$ . Por lo tanto:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0) \quad (3.37)$$

y el movimiento del cuerpo estará contenido en el plano definido por los vectores velocidad inicial y aceleración. Esto permite elegir los ejes de manera que se requieran solamente dos coordenadas para describir el movimiento. Una de ellas es la coordenada  $y$ , mientras que la otra se elegirá como la coordenada  $x$ . De esta manera,  $\vec{v} = (v_x, v_y, 0)$  y  $\vec{a} = (0, -g, 0)$  y podemos escribir

$$v_x = v_{0x}, \quad v_y = v_{0y} - g(t - t_0) \quad (3.38)$$

Las ecuaciones para las coordenadas en función del tiempo se pueden obtener mediante una integración elemental, o, en este caso particular, notando lo siguiente: como la componente  $x$  de la velocidad es constante, entonces el desplazamiento  $x - x_0$  en la dirección  $x$  es igual al producto de dicha velocidad por el intervalo temporal  $t - t_0$ . La componente  $y$  de la velocidad varía; por lo tanto el desplazamiento  $y - y_0$  en la dirección  $y$  es igual al producto de la *velocidad media* por el intervalo  $t - t_0$ . Pero como la variación de la velocidad es uniforme (es decir, las variaciones de  $v_y$  correspondientes a tiempos iguales son iguales), dicha velocidad media es igual al promedio <sup>21</sup>  $(v_y + v_{0y})/2$ , es decir que  $(y - y_0) = (v_y + v_{0y})(t - t_0)/2$ . Despejando  $y$  de esta igualdad y utilizando la relación de más arriba entre  $v_y$  y  $v_{0y}$  se obtiene que la relación entre las coordenadas y el tiempo está dada por:

$$x = x_0 + v_{0x}(t - t_0), \quad y = y_0 + v_{0y}(t - t_0) - \frac{g}{2}(t - t_0)^2 \quad (3.39)$$

Las ecuaciones (3.38) y (3.39) describen completamente el movimiento de un cuerpo puntual bajo la acción de la fuerza peso cerca de la superficie de un planeta. En particular, si se reemplaza  $v_{0x} = 0$  se obtiene la conocida fórmula del tiro vertical.

A partir de las dos últimas ecuaciones se puede demostrar que la trayectoria del cuerpo corresponde a una parábola en el plano  $(x, y)$ . En efecto, despejando  $t - t_0$  de la primera de ellas y reemplazando en la segunda se obtiene <sup>22</sup>:

$$y = y_0 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}(x - x_0) - \frac{g}{2v_{0x}^2}(x - x_0)^2 \quad (3.40)$$

o, introduciendo el ángulo  $\alpha$  formado por el vector velocidad inicial y el eje  $x$  (de modo que  $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$  y  $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$ ),

$$y = y_0 + \tan \alpha (x - x_0) - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}(x - x_0)^2 \quad (3.41)$$

Es interesante recordar en este punto que la forma parabólica de la trayectoria de un cuerpo lanzado cerca de la superficie de la Tierra fue inferida ya por Galileo, antes de que se establecieran en forma

<sup>21</sup> Solamente en este caso. Si la aceleración no es constante esto ya no es cierto.

<sup>22</sup> La ecuación de la parábola es  $y = a + bx + cx^2$ .

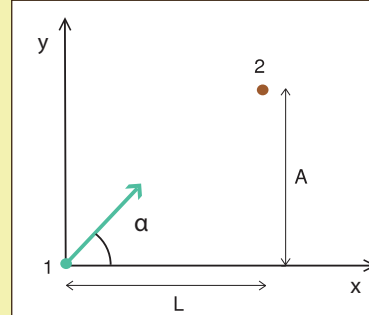
completa las leyes de la dinámica. En la Jornada Cuarta de sus *Diálogos acerca de dos nuevas ciencias* Galileo postula el siguiente Teorema, referido al lanzamiento de un cuerpo en dirección horizontal:

"Teorema I, Proposición I: Un proyectil que se desliza con un movimiento compuesto por un movimiento horizontal y uniforme y por un movimiento descendente, naturalmente acelerado, describe, con dicho movimiento, una línea semiparabólica."

Galileo llama "naturalmente acelerado" al movimiento con la aceleración de la gravedad. Además del análisis que lleva a encontrar la forma de la trayectoria, resulta crucial el paso consistente en pensar el movimiento del proyectil como *una composición de dos movimientos de los cuales solamente uno se ve afectado por la gravedad terrestre*.

## □ Problema 2

Se deja caer un cuerpo al que llamaremos 2 desde la posición inicial ( $x=L$ ,  $y=A$ ) (ver figura 3.3). Desde el origen de coordenadas se quiere lanzar simultáneamente en forma oblicua un cuerpo al que llamaremos 1 de modo que colisione con el cuerpo 2. La velocidad con que se lanza el cuerpo 1 es  $v_0$ . ¿Con qué ángulo debe lanzarse dicho cuerpo?



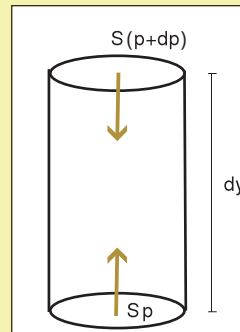
**Figura 3.3.** Problema del encuentro entre los cuerpos 1 y 2. El cuerpo 1 se lanza desde el origen de coordenadas con velocidad inicial  $\vec{v}_0$ ; el cuerpo 2 cae libremente desde  $y = A$ .

## 3.7.4 El gas ideal bajo la acción de la gravedad

Una aplicación interesante de la ley para la energía potencial gravitatoria a alturas pequeñas es la explicación de la variación de la densidad y la presión de un gas en función de la altura sobre la superficie terrestre. Como veremos, el resultado obtenido permite entender por qué al aumentar la altura la atmósfera se va haciendo relativamente más pobre en gases "pesados", como el oxígeno.

Consideremos un cilindro imaginario dentro del gas en las proximidades de la superficie con altura  $dy$ , y cuya base tiene área  $S$  (ver figura 3.4).

Las presiones en la base y en la "tapa" superior pueden escribirse como  $p$  y  $p+dp$ , mientras que el peso de dicho cilindro es igual a  $\rho S dy g$ , donde  $\rho$  es la densidad del gas. Si el gas está en equilibrio, el peso debe cancelarse con las fuerzas sobre la base y la "tapa", que son iguales, respectivamente, a  $\rho S y$  y  $-(p+dp)S$  (la fuerza sobre la base apunta "hacia arriba", mientras que la fuerza sobre la tapa apunta "hacia abajo"; véase la figura 3.4). Por lo tanto:



**Figura 3.4.** Cilindro de base  $S$  y altura  $dy$ .

$$-\rho S dy + pS - (p + dp)S = 0 \quad (3.42)$$

de donde: 
$$dp = -\rho g dy \quad (3.43)$$

lo cual no es más que una de las posibles formas de escribir la ley fundamental de la hidrostática. Ahora bien, la densidad es igual a la densidad de moléculas  $n$  (es decir,  $n$  es el número de moléculas por unidad de volumen) multiplicada por la masa  $m$  de una de ellas, es decir,  $\rho = nm$ . Por otro lado, si las condiciones son tales que el gas puede considerarse ideal, vale la ecuación de estado  $pV = NkT$ , donde  $V$  es el volumen,  $N$  es el número de moléculas,  $k$  es la constante de Boltzmann <sup>23</sup> y  $T$  la temperatura absoluta. Entonces  $n = N/V = p/(kT)$ , y podemos escribir la relación entre cantidades infinitesimales:

$$dp = dn kT \quad (3.44)$$

De las últimas dos ecuaciones (usando que  $\rho = nm$ ) se obtiene:

$$dn kT = -nm g dy \quad (3.45)$$

de modo que: 
$$\frac{dn}{n} = -\frac{mg}{kT} dy \quad (3.46)$$

Integrando esta igualdad miembro a miembro <sup>24</sup> se obtiene que la densidad de moléculas como función de la altura está dada por:

$$n = n_0 e^{-mgy/(kT)} \quad (3.47)$$

donde  $n_0$  es la densidad correspondiente a la altura tomada como origen del eje  $y$ . Como vemos, la densidad decrece al aumentar la altura, y la disminución es tanto mayor cuanto más grande es la masa molecular  $m$ . La fórmula (3.47) expresa la llamada *distribución de Boltzmann* para una energía potencial de la forma  $U = mgy$ .

Una relación similar existe entre la presión y la altura, lo cual se deduce de que, como vimos más arriba,  $n = p/(kT)$ . La presión decrece de acuerdo con la llamada *fórmula barométrica*:

$$p = p_0 e^{-mgy/(kT)} \quad (3.48)$$

donde  $p_0$  es la presión en la altura tomada como  $y = 0$ . Como las moléculas de los gases ideales no interactúan entre sí, esta fórmula puede aplicarse a cada gas de una mezcla, como es el caso de la atmósfera <sup>25</sup>. De esta manera, se tiene una fórmula como la (3.48) para la presión parcial de cada gas de la mezcla. Como la disminución de la presión es mayor para un gas de masa molecular más grande, esto explica por qué al aumentar la altura la atmósfera es más pobre en gases pesados; en particular, por ejemplo, la presión del oxígeno disminuye más abruptamente que la del nitrógeno.

<sup>23</sup> Su valor es  $k = 1,38 \times 10^{-16}$  ergio/grado; recordemos que 1 ergio =  $10^{-7}$  Joule.

<sup>24</sup> Se integra fácilmente recordando que  $d \ln x / dx = 1/x$ , de modo que:  $\int x^{-1} dx = \ln x + \text{constante}$ .

<sup>25</sup> En este caso los resultados deben tomarse como una primera aproximación, pues la atmósfera no se encuentra realmente en equilibrio térmico y la temperatura no es constante.

## □ 3.8. Potencial gravitatorio y campo gravitatorio

### 3.8.1 Forma general del potencial

Consideremos un cuerpo puntual de masa  $m$  ubicado en una posición  $\vec{r}$  que interactúa gravitatoriamente con otros dos cuerpos puntuales de masas  $m_1$  y  $m_2$ , ubicados respectivamente en las posiciones  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$ . Cada una de esas dos interacciones tiene asociada una energía potencial  $U_1$  y  $U_2$  tal que, si se las suma y se las deriva respecto de las coordenadas del cuerpo de masa  $m$ , dan como resultado la fuerza sobre el mismo. La suma de dichas energías es <sup>26</sup>:

$$U_1 + U_2 = -G \frac{m_1 m}{r_1} - G \frac{m_2 m}{r_2} \quad (3.49)$$

donde  $r_1 = |\vec{r} - \vec{r}_1|$  y  $r_2 = |\vec{r} - \vec{r}_2|$  (véase la figura 3.5).

La generalización al caso en que el cuerpo de masa  $m$  interactúa con más de dos cuerpos, digamos  $N$ , es inmediata:

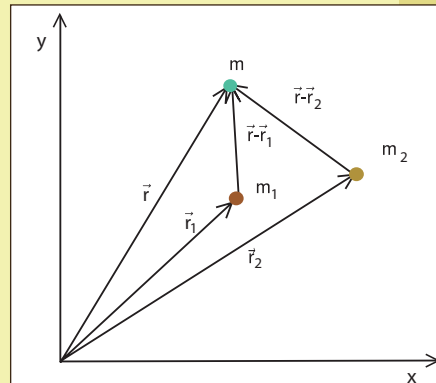
$$U_1 + U_2 + \dots = -G \sum_{i=1}^N \frac{m_i m}{r_i} = -Gm \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{r_i} \quad (3.50)$$

El hecho de que la masa  $m$  multiplica a toda la suma hace natural definir el *potencial gravitatorio*  $\Phi$  tal que la energía es igual al producto del mismo por la masa; para hacer explícito que depende de la posición  $\vec{r}$  (a través de las restas entre las posiciones  $\vec{r}_i$  y el vector  $\vec{r}$  en los denominadores), escribimos:

$$\Phi(\vec{r}) = -G \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \quad (3.51)$$

Esto nos permite generalizar la forma de obtener la fuerza que actuaría sobre un cuerpo puntual cualquiera situado en una posición cualquiera del espacio, bajo la acción de los  $N$  cuerpos situados en las posiciones  $\vec{r}_i$ . Basta para ello con calcular el potencial asociado con esa distribución de  $N$  cuerpos en un punto genérico  $\vec{r}$ , derivarlo respecto de  $\vec{r}$ , cambiarle el signo al resultado y luego multiplicar por el valor de la masa <sup>27</sup> (ver 3.8.2).

A partir de la expresión del potencial para un conjunto de cuerpos puntuales se puede inferir cómo debe ser el potencial  $\Phi$  asociado con una distribución continua de materia, esto es, con un cuerpo extenso. En general, un cuerpo extenso puede tener cualquier forma y su densidad



**Figura 3.5.** Coordenadas de posición de  $m_1$  y  $m_2$  donde  $r_i = |\vec{r} - \vec{r}_i|$ .

<sup>26</sup> Esta suma no es la energía potencial total del sistema formado por los tres cuerpos. La energía potencial del sistema incluye, además, la de la interacción de los cuerpos de masas  $m_1$  y  $m_2$  entre ellos, que es de la forma  $-Gm_1 m_2 / r_{12}$ , donde  $r_{12} = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ . Véase el capítulo 2.

<sup>27</sup> Por supuesto, esto no es más que otra forma de presentar la relación entre fuerza y energía potencial, introducida en el capítulo 2.

$\rho$  dependerá del punto que se considere dentro del mismo. Si para identificar los puntos del cuerpo extenso usamos la notación  $\vec{r}'$ , entonces  $\rho = \rho(\vec{r}')$ . La masa contenida en un volumen infinitesimal  $dV' = dx' dy' dz'$  es igual a  $\rho(\vec{r}')dV'$ , y su contribución al potencial  $\Phi$  en un punto  $\vec{r}$  es igual a  $-G\rho(\vec{r}')dV' / |\vec{r} - \vec{r}'|$ . Por lo tanto, para un punto cualquiera  $\vec{r}$ , el potencial del cuerpo extenso se obtiene sumando todas estas contribuciones, lo cual corresponde a integrar sobre todo el volumen del cuerpo.

Así:

$$\Phi(\vec{r}) = -G \int \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \text{constante} \quad (3.52)$$

Por cierto, el cálculo concreto requiere conocer la distribución espacial de la masa dada por  $\rho(\vec{r}')$  para el caso particular considerado, y elegir la constante de acuerdo con lo que resulte más conveniente.

### 3.8.2 Campo gravitatorio; expresión general

Como ya mencionamos, dada una configuración de  $N$  cuerpos puntuales, la fuerza de todos ellos sobre otro cuerpo (digamos de masa  $m$ ) puede calcularse a partir del potencial  $\Phi$ . Para eso basta con derivar el potencial cambiando de signo, y al resultado, evaluado en la posición del cuerpo masa  $m$ , multiplicarlo por el valor de dicha masa. Es decir, que la fuerza  $\vec{F}$  sobre el cuerpo situado en el punto  $\vec{r}$  del espacio está dada por <sup>28</sup>:

$$\vec{F} = -m \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{r}} = -mG \sum_{i=1}^N \frac{m_i (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \quad (3.53)$$

Este resultado hace natural introducir el concepto de *campo gravitatorio*  $\vec{g}$ : es el campo (vectorial) asociado a un conjunto de cuerpos, tal que su producto por la masa de un cuerpo, da el vector fuerza sobre el mismo ejercida por dicho conjunto. De esta manera, el campo en un punto  $\vec{r}$  del espacio es:

$$\vec{g}(\vec{r}) = -G \sum_{i=1}^N \frac{m_i (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \quad (3.54)$$

y la fuerza es  $m\vec{g}$ . La generalización para el caso de una distribución continua de materia es inmediata:

$$\vec{g}(\vec{r}) = -G \int \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (3.55)$$

En esta última fórmula, como en la correspondiente para el potencial,  $\vec{r}'$  indica cada punto de la distribución de materia.

<sup>28</sup> Omitimos el cálculo explícito, pero queremos señalar que no es de una dificultad particular. La manera más directa de realizarlo es escribir en coordenadas cartesianas el módulo de la diferencia entre  $\vec{r}$  y  $\vec{r}'$ , y usar la regla de la cadena al calcular la derivada de la inversa de la raíz cuadrada respecto de cada una de las coordenadas  $x, y, z$ .

En el caso particular de un cuerpo esféricamente simétrico de masa  $m'$  situado en el origen de coordenadas, el cálculo explícito del campo gravitatorio en su exterior da como resultado:

$$\vec{g}(\vec{r}) = -G \frac{m' \vec{r}}{r^3} \quad (3.56)$$

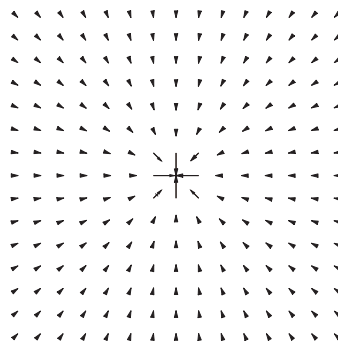
de acuerdo con la ley de la inversa del cuadrado de la distancia: El cociente  $\vec{r}/r^3$  da, para cada punto del espacio, un vector de dirección radial y valor igual a  $1/r^2$  (lo cual es fácil intuir si se trabaja en coordenadas cartesianas, de modo que  $\vec{r} = (x, y, z)$  y  $r^3 = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$ ). Así, la dirección del campo en cada punto del espacio es la que pasa por el origen, y el sentido es opuesto a aquel en que crece la distancia al mismo (ver figura 3.6).

### 3.8.3 Principio de superposición

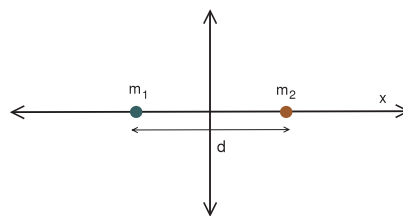
Cuando la masa está distribuida en forma altamente simétrica, el cálculo del campo gravitatorio es muy sencillo. Por ejemplo, el campo en el exterior de una esfera es el dado por la ecuación (3.56), y muy cerca de la superficie (es decir a alturas mucho menores que el radio) el campo es uniforme: si y es el eje correspondiente a la dirección vertical,  $\vec{g} = (0; -g; 0)$ . Cuando la distribución de masa carece de una alta simetría, el cálculo puede complicarse considerablemente (si bien existen procedimientos matemáticos bien establecidos para encontrar la solución). En casos de dificultad intermedia, puede ocurrir que la distribución de masa sea la suma de distribuciones simples, y entonces el cálculo puede abordarse con herramientas elementales de la matemática. En efecto, de la aditividad del potencial  $\Phi$  (que se deduce de su definición) se desprende la aditividad de los campos, de modo que el campo total debido a un conjunto de distribuciones de masa es la suma de los campos asociados con cada distribución. A esta propiedad del campo gravitatorio en la teoría clásica<sup>29</sup> se la conoce como principio de superposición.

### 3.8.4 Ejemplos

A continuación aprovecharemos el principio de superposición para calcular el campo gravitatorio de algunas configuraciones no triviales. La aditividad de los campos nos permitirá ahorrar cuentas y utilizar resultados conocidos, escritos convenientemente para cada caso de interés.



**Figura 3.6.** Campo gravitatorio correspondiente a un cuerpo esféricamente simétrico en el exterior del mismo. Se puede observar que éste no es un campo uniforme como el de la figura 2.1 izquierda ni un campo repulsivo como el de la figura 2.1 derecha.



**Figura 3.7.** Dos masas puntuales separadas una distancia  $d$ .

<sup>29</sup> Propiedad compartida con el campo electromagnético.



1. Supongamos que dos masas puntuales  $m_1$  y  $m_2$  se encuentran separadas por una distancia  $d$  como se muestra en la figura 3.7. ¿Cuál será el campo gravitatorio asociado con ambas masas? Si tomamos como eje  $x$  el que pasa por ambas masas, y ponemos el origen en el punto medio entre ambas, entonces las coordenadas de cada una son:

$$\vec{r}_1 = (-d/2, 0, 0) \quad \vec{r}_2 = (d/2, 0, 0) \quad (3.57)$$

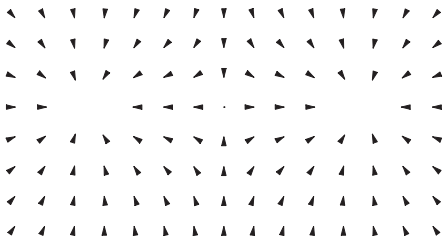
Por lo tanto, el campo de cada masa (ambos esféricamente simétricos) está centrado en cada uno de estos puntos, y podemos escribir:

$$\vec{g}_1(\vec{r}) = -G \frac{m_1(\vec{r} - (-d/2, 0, 0))}{|\vec{r} - (-d/2, 0, 0)|^3} \quad (3.58)$$

$$\vec{g}_2(\vec{r}) = -G \frac{m_2(\vec{r} - (d/2, 0, 0))}{|\vec{r} - (d/2, 0, 0)|^3} \quad (3.59)$$

El campo total  $\vec{g}$  es la suma  $\vec{g}_1(\vec{r}) + \vec{g}_2(\vec{r})$ . Puesto que los centros de ambos campos no coinciden, lo que es la dirección radial para una de las masas no lo es para la otra, y entonces la resta debe realizarse pasando previamente a las expresiones de los campos en componentes cartesianas. Así:

$$\begin{aligned} g_x(x, y, z) &= -\frac{Gm_1(x + d/2)}{((x + d/2)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{Gm_2(x - d/2)}{((x - d/2)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ g_y(x, y, z) &= -\frac{Gm_1y}{((x + d/2)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{Gm_2y}{((x - d/2)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ g_z(x, y, z) &= -\frac{Gm_1z}{((x + d/2)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{Gm_2z}{((x - d/2)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \end{aligned}$$



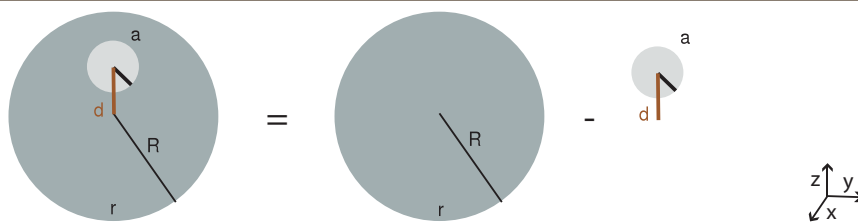
**Figura 3.8.** Campo gravitatorio correspondiente a dos masas puntuales separadas una distancia  $d$ . Para graficar el campo se ha considerado  $m_1 = m_2$ .

Está claro que el campo de esta configuración tiene que ser invariante ante una rotación alrededor del eje  $x$ , ya que la distribución de masa tiene ese eje como eje de simetría. Dicha invariancia se demuestra observando, simplemente, que el campo es la suma de dos campos que son, cada uno, invariantes ante rotaciones alrededor del eje  $x$  (ver figura 3.8).

2. Consideremos una esfera de radio  $R$  y densidad  $\rho$ , con un hueco esférico de radio  $a$ , centrado a una distancia  $d$  del centro de la esfera (por supuesto,  $d + a < R$ ) como se muestra en la figura 3.9. El cálculo del campo gravitatorio en el exterior de la configuración, (en general, en cualquier punto del espacio) podría, en principio, realizarse mediante la integral (3.55). Sin embargo, es más sencillo notar que la esfera con un hueco

debe generar un campo que es igual al de la esfera completa menos el campo de la esfera interior que ha sido removida para lograr el hueco (ver figura 3.9). El campo en el exterior de la esfera completa (a la que supondremos centrada en el origen de coordenadas) es:

$$\vec{g}_0(\vec{r}) = -G \frac{\rho V \vec{r}}{r^3} \quad (3.60)$$



**Figura 3.9.** El campo para una esfera de radio  $R$  con un hueco de radio  $a$  situado a una distancia  $d$  de su centro, se puede calcular como el campo de la esfera de radio  $R$  menos el campo de la esfera de radio  $a$  cuyo origen está situado a una distancia  $d$  sobre el eje  $z$ .

donde  $V$  es el volumen igual a  $4\pi R^3/3$ , de modo que  $\rho V$  sería la masa de la esfera si estuviera completa. La esfera interior está descentrada. Elijamos como eje  $z$  el que pasa por los centros de ambas esferas (es decir, por el origen y el centro de la esfera interior); entonces el centro de la esfera interior se ubica en el punto  $(0, 0, d)$ , y el campo correspondiente (fuera de dicha esfera) es simétrico alrededor de ese punto:

$$\vec{g}_i(\vec{r}) = -\frac{G\rho V_1(\vec{r} - (0, 0, d))}{|\vec{r} - (0, 0, d)|^3} \quad (3.61)$$

donde  $V_1$  es el volumen igual a  $4\pi a^3/3$ , de modo que  $\rho V_1$  corresponde a la masa de la esfera interior. Los campos escritos en términos de sus componentes cartesianas son:

$$\vec{g}_0(x, y, z) = -\frac{G\rho V(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} \vec{g}_i(x, y, z) &= -\frac{G\rho V_1((x, y, z) - (0, 0, d))}{|(x, y, z) - (0, 0, d)|^3} \\ &= -\frac{G\rho V_1(x, y, z - d)}{(x^2 + y^2 + (z - d)^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (3.63)$$

Ahora restamos para obtener el campo buscado (es decir el campo fuera de la esfera con un hueco en su interior):

$$\begin{aligned} \vec{g}(x, y, z) &= \vec{g}_0(x, y, z) - \vec{g}_i(x, y, z) \\ &= -\frac{G\rho V(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{G\rho V_1(x, y, z - d)}{(x^2 + y^2 + (z - d)^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (3.64)$$

El resultado puede expresarse dando cada componente cartesiana por separado:

$$g_x(x, y, z) = -\frac{G\rho V x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{G\rho V_1 x}{(x^2 + y^2 + (z - d)^2)^{3/2}} \quad (3.65)$$

$$g_y(x, y, z) = -\frac{G\rho V y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{G\rho V_1 y}{(x^2 + y^2 + (z - d)^2)^{3/2}} \quad (3.66)$$

$$g_z(x, y, z) = -\frac{G\rho V z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{G\rho V_1(z - d)}{(x^2 + y^2 + (z - d)^2)^{3/2}} \quad (3.67)$$

En forma análoga a la del ejemplo anterior, es sencillo ver que el campo tiene simetría de revolución alrededor del eje de simetría de la distribución de masa, es decir alrededor del eje z.

3. Analicemos ahora una variante del caso anterior, en la que el hueco se llena con materia de densidad uniforme  $\rho_1 \neq \rho$ . En este caso, el campo total fuera de la esfera de radio R es el campo de la esfera con densidad  $\rho$  y radio R menos el campo de la esfera con densidad  $\rho$  y radio a cuyo centro se encuentra situado a una distancia d sobre el eje z más el campo de una esfera de radio a y densidad  $\rho_1$  centrada en la posición (0, 0, d). Luego:

$$\begin{aligned} \vec{g}(x, y, z) &= -\frac{G\rho V(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{G\rho V_1(x, y, z - d)}{(x^2 + y^2 + (z - d)^2)^{3/2}} - \frac{G\rho_1 V_1(x, y, z - d)}{(x^2 + y^2 + (z - d)^2)^{3/2}} \\ &= -\frac{G\rho V(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{G(\rho_1 - \rho)V_1(x, y, z - d)}{(x^2 + y^2 + (z - d)^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (3.68)$$

Las componentes cartesianas del campo total son:

$$g_x(x, y, z) = -\frac{G\rho V x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{G(\rho_1 - \rho)V_1 x}{(x^2 + y^2 + (z - d)^2)^{3/2}} \quad (3.69)$$

$$g_y(x, y, z) = -\frac{G\rho V y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{G(\rho_1 - \rho)V_1 y}{(x^2 + y^2 + (z - d)^2)^{3/2}} \quad (3.70)$$

$$g_z(x, y, z) = -\frac{G\rho V z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{G(\rho_1 - \rho)V_1(z - d)}{(x^2 + y^2 + (z - d)^2)^{3/2}} \quad (3.71)$$

Evidentemente, dada la analogía geométrica con el caso anterior, el campo debe ser simétrico respecto del eje z.

4. Ahora, supongamos que se consideran distancias muy pequeñas por encima de la superficie de un cuerpo de radio R, de modo que la superficie puede aproximarse como localmente plana; si el cuerpo es homogéneo (digamos de densidad uniforme  $\rho$ ), el campo gravitatorio puede suponerse uniforme y de valor  $g_0 = G\rho 4\pi R/3$ . Este ejemplo es como el caso de la gravedad de la Tierra a alturas pequeñas en comparación con su radio. Pero ahora, a una distancia  $d \ll R$  por debajo de la superficie se ubica una esfera de densidad  $\rho_1$  y radio  $a < d$ . De acuerdo con la discusión previa, tal como en los ejemplos precedentes podemos calcular el campo total (por encima de la superficie) como la suma del campo  $\vec{g}_0$  que existiría si el cuerpo fuera homogéneo, menos el campo producido por una esfera de radio a y densidad  $\rho$ , más el campo producido por una esfera de las mismas dimensiones, igual ubicación y densidad  $\rho_1$ . Si tomamos el eje z en la dirección perpendicular a la superficie y elegimos como positivo el sentido en que la distancia a la superficie aumenta, la esfera está centrada en el punto (0, 0, -d), y el campo es:

$$\begin{aligned}\vec{g}(x, y, z) &= (0, 0, -g_0) + \frac{G\rho V_1(x, y, z + d)}{(x^2 + y^2 + (z + d)^2)^{3/2}} - \frac{G\rho_1 V_1(x, y, z + d)}{(x^2 + y^2 + (z + d)^2)^{3/2}} \\ &= (0, 0, -g_0) - \frac{G(\rho_1 - \rho)V_1(x, y, z + d)}{(x^2 + y^2 + (z + d)^2)^{3/2}}\end{aligned}\quad (3.72)$$

donde  $V_1 = 4\pi a^3/3$  es el volumen de la esfera bajo la superficie. Los ejes  $x$  e  $y$  están contenidos en el plano de la superficie. Las componentes cartesianas del campo son:

$$g_x(x, y, z) = -\frac{G(\rho_1 - \rho)V_1 x}{(x^2 + y^2 + (z + d)^2)^{3/2}} \quad (3.73)$$

$$g_y(x, y, z) = -\frac{G(\rho_1 - \rho)V_1 y}{(x^2 + y^2 + (z + d)^2)^{3/2}} \quad (3.74)$$

$$g_z(x, y, z) = -g_0 - \frac{G(\rho_1 - \rho)V_1(z + d)}{(x^2 + y^2 + (z + d)^2)^{3/2}} \quad (3.75)$$

Si  $\rho_1 > \rho$  las dos componentes de  $\vec{g}$  paralelas a la superficie apuntan hacia el eje  $z$  (ver figura 3.10), mientras que si  $\rho_1 < \rho$  dichas componentes apuntan en sentido contrario (ver figura 3.11). En el primer caso, el valor de la componente vertical se ve incrementado respecto del valor correspondiente a la distribución homogénea, mientras que en el segundo caso dicha componente se ve reducida.

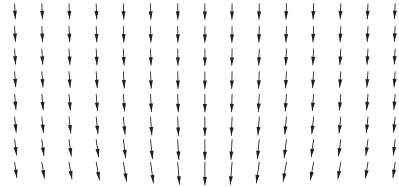
En la práctica, podría resultar de interés conocer el campo justo en la superficie; en ese caso debemos tomar  $z = 0$  en las expresiones de las componentes. Para simplificar las cuentas puede ser conveniente, además, restringirnos a un eje que pase por encima del centro de la esfera, digamos el eje  $x$  (por supuesto, esto resta generalidad al análisis, pero permite prestar atención a algunos aspectos interesantes). Entonces, sobre dicho eje las componentes del campo son:

$$g_x(x, 0, 0) = -\frac{G(\rho_1 - \rho)V_1 x}{(x^2 + d^2)^{3/2}} \quad (3.76)$$

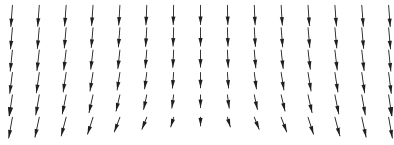
$$g_y(x, 0, 0) = 0 \quad (3.77)$$

$$g_z(x, 0, 0) = -g_0 - \frac{G(\rho_1 - \rho)V_1 d}{(x^2 + d^2)^{3/2}} \quad (3.78)$$

Vemos que, si consideramos puntos por encima del centro de la esfera sumergida, es decir muy próximos al origen de modo que  $x \ll d$ , entonces la componente "horizontal"  $g_x$  se hace muy pequeña; de hecho, esta componente se anula cuando  $x = 0$ . Por otro lado, la componente "vertical"  $g_z$  tiende, en el origen, a  $-g_0 - G(\rho_1 - \rho)V_1/d^2$ . En cambio, cuando consideramos distancias grandes del origen (pero no tanto que deje de ser válida la aproximación que hicimos considerando el problema como "plano"), la componente  $g_x$  tiende a cero, mientras



**Figura 3.10.** Campo gravitatorio correspondiente a una esfera de densidad  $\rho_1$  situada a una distancia  $d$  por debajo de la superficie. En este caso  $\rho_1 > \rho$  donde  $\rho$  es la densidad del planeta.



**Figura 3.11.** Campo gravitatorio correspondiente a una esfera de densidad  $\rho_1$  situada a una distancia  $d$  por debajo de la superficie. En este caso  $\rho_1 < \rho$  donde  $\rho$  es la densidad del planeta.

que la componente  $g_z$  tiende al valor  $g_0$ . El ángulo  $\gamma$  que forma el campo  $\vec{g}$  con la vertical está definido por el cociente entre los valores de las componentes  $g_x$  y  $g_z$ :  $\tan \gamma = g_x/g_z$ .

Un péndulo suspendido en reposo formaría un ángulo  $\gamma$  con la vertical, y su signo, para densidades dadas, depende de la posición (cambia al pasar por  $x = 0$ ).

Observemos que los resultados sugieren la idea básica de un método para detectar variaciones de la densidad de masa bajo la superficie de un planeta. El ejemplo 3 correspondería a investigar una inhomogeneidad de un tamaño comparable al

del planeta, mientras que el ejemplo 4 involucra el tipo de análisis necesario para estudiar una inhomogeneidad de dimensiones pequeñas en comparación con las del planeta.

### □ Problema 3

Bajo la superficie de la Tierra se han ubicado dos esferas de volúmenes  $V_1$  y  $V_2$ , y densidades  $\rho_1 < \rho$  y  $\rho_2 > \rho$ , donde  $\rho$  es la densidad del resto del subsuelo. Los centros de ambas esferas están a una profundidad  $d$ , y la separación entre los mismos es  $L$ . Se quiere determinar la inclinación de un péndulo muy próximo a la superficie en función de su posición a lo largo del eje que pasa por los centros de ambas esferas.

# 4. Movimiento en un campo gravitatorio central

## □ 4.1. Forma general de la trayectoria

Estudiaremos, a continuación, el movimiento de un cuerpo de masa  $m$  bajo la acción de la fuerza gravitatoria de un cuerpo esférico de masa  $m' \gg m$ . Esta relación entre las masas permite suponer que el cuerpo de masa  $m$  se mueve en un campo gravitatorio central y constante, producido por el cuerpo de masa  $m'$ . El problema de estudiar un caso en que dicha condición no se cumple, y por lo tanto ambos cuerpos deben considerarse en movimiento alrededor del centro de masa, se reduce al de un único cuerpo en un campo central por el procedimiento introducido en la sección 5.1 del capítulo 2.

Dada la forma de la ley de gravedad de Newton, para determinar las trayectorias posibles del cuerpo en un campo gravitatorio central partiremos de una energía potencial de la forma:

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} \quad (4.1)$$

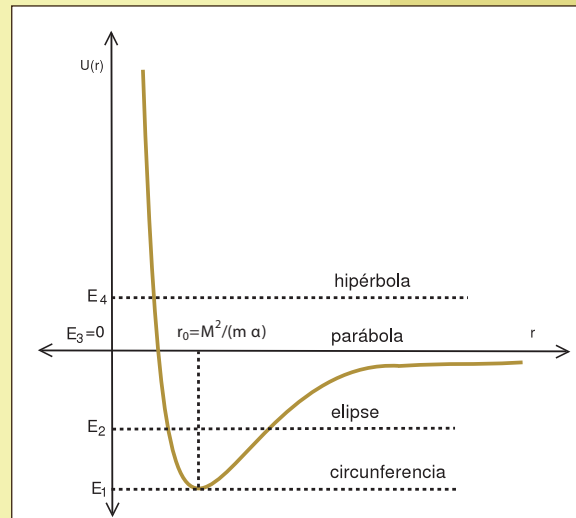
donde  $\alpha = Gmm' > 0$ <sup>30</sup>. De este modo, el potencial efectivo (que incluye la energía cinética de la parte angular del movimiento) es igual a:

$$U_{ef} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2} \quad (4.2)$$

y la energía del cuerpo se escribe:

$$E = \frac{1}{2}mv_r^2 - \frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2} \quad (4.3)$$

donde  $v_r = dr/dt$  es la velocidad radial. Cuando  $r$  tiende a 0, el potencial efectivo tiende a infinito<sup>31</sup>, mientras que para una distancia  $r$  tendiendo al infinito el potencial efectivo tiende a 0. En el radio  $r_0 = M^2/m\alpha$  el potencial efectivo tiene un mínimo, donde toma el valor  $U_{efmin} = E_1 = -\alpha^2/2M^2$  (ver figura 4.1).



**Figura 4.1.** Potencial efectivo en una dimensión. Para distintos valores de energía se obtienen órbitas circulares, elípticas, parabólicas o hiperbólicas.

<sup>30</sup> Esta forma de la energía potencial es la misma que describe la interacción entre dos cargas eléctricas puntuales. En ese caso  $\alpha = -ee'$ , donde  $e$  y  $e'$  son los valores de las cargas (con sus signos), de modo que  $U(r) = ee'/r$ .

<sup>31</sup> Notemos que esto se señala para caracterizar matemáticamente la dependencia de  $U$  con  $r$ , pero para el campo producido por un cuerpo de radio  $R > 0$ , esta expresión del potencial sólo es válida para  $r \geq R$ .

La relación entre una variación infinitesimal del ángulo en términos de una variación de la distancia al centro se obtiene reemplazando este potencial en la expresión general dada en el capítulo 2 (ver ecuación 2.56). El resultado es:

$$d\varnothing = \frac{Mdr}{r^2 \sqrt{2m(E + \alpha/r) - M^2/r^2}} \quad (4.4)$$

Para encontrar la ecuación de la trayectoria  $\varnothing(r)$  reescribimos:

$$d\varnothing = \frac{Mdr}{r \sqrt{2mE r^2 + 2mar - M^2}} \quad (4.5)$$

e integramos miembro a miembro<sup>32</sup>. Obtenemos:

$$\varnothing = \arcsen \left( \frac{\alpha - M^2/(mr)}{\sqrt{\alpha^2 + 2EM^2/m}} \right) + C \quad (4.6)$$

donde C es una constante determinada por la elección del radio al cual se hace corresponder  $\varnothing = 0$ . Es conveniente, como se verá más adelante, elegir  $C = \pi/2$  y usar que  $\sen(\varnothing - \pi/2) = -\cos \varnothing$ . Así, reordenando un poco la expresión resultante, tenemos:

$$\varnothing = \arccos \left( \frac{-1 + M^2/(mar)}{\sqrt{1 + 2EM^2/(m\alpha^2)}} \right) \quad (4.7)$$

que resuelve en forma general el problema de obtener la trayectoria del cuerpo de masa m en un campo central asociado con una energía potencial  $U(r) = -\alpha/r$  con  $\alpha > 0$ .

Invirtiendo la ecuación de la trayectoria (es decir, despejando  $r(\varnothing)$ ) e introduciendo las definiciones del *parámetro*:

$$p = M^2/m\alpha \quad (4.8)$$

y la *excentricidad*:

$$e = \sqrt{1 + 2EM^2/(m\alpha^2)} \quad (4.9)$$

se obtiene:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varnothing} \quad (4.10)$$

Dada su definición, el parámetro es positivo:  $p > 0$ ; sus dimensiones son las de una longitud. La excentricidad es una magnitud adimensional, y es mayor o igual que cero:  $e \geq 0$ .

La trayectoria puede escribirse en coordenadas cartesianas utilizando que:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \cos \varnothing = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (4.11)$$

<sup>32</sup> Usamos la tabla de integrales:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{-c}} \arcsen \left( \frac{bx+2c}{|x|\sqrt{b^2-4ac}} \right) + \text{constante, si } c < 0.$$

lo cual corresponde a que el centro del campo se encuentra en  $x = 0$ ,  $y = 0$ , y a que el ángulo  $\varnothing$  se mide respecto del eje  $x$  (ver figura 2.9). El resultado que se obtiene es:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = p - ex \quad (4.12)$$

Como veremos a continuación, esta forma de expresar la trayectoria será de gran utilidad para comprender cómo la misma depende de la relación entre la energía y las demás constantes de un problema.

## □ 4.2. Casos particulares

De la definición de la excentricidad se desprende que, para un dado valor  $M$  del impulso angular, el valor de la energía (dado por las condiciones iniciales) determina cuatro situaciones cualitativamente diferentes:

1. Si  $E = -m\alpha^2/2M^2 = U_{\text{efmin}}$  se tiene  $e = 0$ . Por lo tanto, desaparece la dependencia de  $r$  con el ángulo  $\varnothing$ , y se obtiene:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = p \quad (4.13)$$

lo que corresponde a una circunferencia de radio  $p$  centrada en el punto  $x = 0$ ,  $y = 0$ . Este resultado es coherente con que para  $E = U_{\text{efmin}}$  se tiene siempre  $v_r = dr/dt = 0$ , lo que justamente significa que la distancia al centro no cambia, es decir el movimiento es circular.

2. Si  $E = 0$  se tiene  $e = 1$ . En ese caso la distancia al centro alcanza su valor mínimo  $r = p/2$  cuando  $\varnothing = 0$ , mientras que cuando  $\varnothing$  se acerca a  $\pi$ , el radio crece ilimitadamente. Si partimos de la expresión de la trayectoria en coordenadas cartesianas y elevamos al cuadrado ambos miembros, obtenemos:

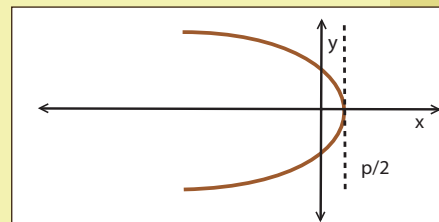
$$x^2 + y^2 = p^2 + x^2 - 2px \quad (4.14)$$

de donde:

$$x = \frac{p}{2} - \frac{y^2}{2p} \quad (4.15)$$

lo cual corresponde a la ecuación de una parábola simétrica respecto del eje  $x$ , y cuyo vértice se encuentra en el punto  $x = p/2$ ,  $y = 0$  (ver figura 4.2).

El hecho de que en este caso la trayectoria es tal que el cuerpo se aleja sin límites es esperable a partir de la analogía entre la parte radial del problema y un movimiento lineal con un potencial igual a  $U_{\text{ef}}$ . En efecto, para  $E = 0$  existe un único punto de retorno correspondiente al único radio para el cual se cumple  $E = U_{\text{ef}}$ , y el cuerpo puede alcanzar cualquier radio más allá de este valor.



**Figura 4.2.** Para  $E = 0$  la trayectoria es una parábola de vértice  $x = p/2$ .



3. Si  $-\alpha^2/2M^2 < E < 0$  se tiene  $0 < e < 1$ . Por lo tanto el denominador de la expresión para el radio en función del ángulo  $r = p/(1 + e \cos \theta)$  no se anula nunca; en cambio, toma su valor mínimo  $1 - e$  cuando  $\theta = \pi$ , y su máximo  $1 + e$  cuando  $\theta = 0$ . Por lo tanto, la distancia al centro alcanza su máximo  $r = p/(1 - e)$  cuando  $\theta = \pi$ , y alcanza su mínimo  $r = p/(1 + e)$  cuando  $\theta = 0$ ; la distancia máxima corresponde a la posición llamada afelio de la órbita, mientras que la distancia mínima corresponde a la posición llamada perihelio.

Elevando al cuadrado la expresión de la trayectoria en coordenadas cartesianas se obtiene:

$$x^2 + y^2 = p^2 + e^2x^2 - 2epx \quad (4.16)$$

Agrupando los términos de acuerdo con las potencias de cada coordenada y dividiendo miembro a miembro por  $1 - e^2$  (lo cual es posible porque  $e < 1$ ), obtenemos:

$$x^2 + \frac{2epx}{1 - e^2} + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{p^2}{1 - e^2} \quad (4.17)$$

Sumamos la cantidad  $e^2p^2/(1 - e^2)^2$  miembro a miembro:

$$x^2 + \frac{2epx}{1 - e^2} + \frac{e^2p^2}{(1 - e^2)^2} + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{p^2}{1 - e^2} + \frac{e^2p^2}{(1 - e^2)^2} \quad (4.18)$$

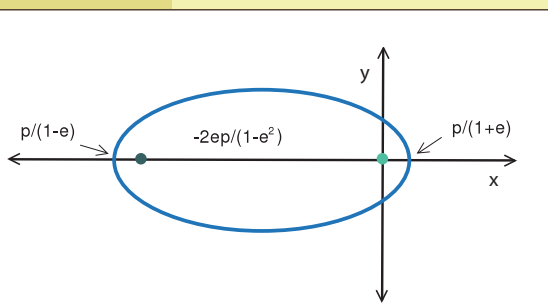
Los tres primeros términos del miembro izquierdo de esta igualdad se agrupan en el cuadrado de un binomio, y los dos términos del miembro derecho pueden reagruparse; de este modo:

$$\left(x + \frac{ep}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{p^2}{(1 - e^2)^2} \quad (4.19)$$

y de aquí se obtiene la expresión final:

$$\frac{(x + ep/(1 - e^2))^2}{p^2/(1 - e^2)^2} + \frac{y^2}{p^2/(1 - e^2)} = 1 \quad (4.20)$$

Como  $0 < e < 1$ , esta ecuación describe una elipse<sup>33</sup> simétrica respecto del eje  $x$ , cuyo centro está situado en  $x = -ep/(1 - e^2)$  e  $y = 0$ , y cuyos semiejes son  $p/(1 - e^2)$  y  $p/\sqrt{1 - e^2}$  (ver la figura 4.3). La longitud del semieje mayor  $p/(1 - e^2)$  resulta, claro está, igual a la mitad de la suma entre la mayor y la menor distancia al centro, que son, respectivamente,  $p/(1 - e)$  y  $p/(1 + e)$ . La elipse tiene dos focos. Uno de ellos se encuentra en el punto  $x = 0$ ,  $y = 0$ , que corresponde al centro del campo; el otro se encuentra en  $x = -2ep/(1 - e^2)$ ,  $y = 0$ . En efecto, dada la simetría, la distancia entre los dos focos deber ser igual a la resta entre la mayor y la menor distancia al centro:



**Figura 4.3.** Para  $U_{\text{fmin}} < E < 0$  la trayectoria es una elipse de focos  $x = 0$  y  $x = ep/1 - e^2$ .

<sup>33</sup>Recordemos que, en coordenadas cartesianas, la ecuación de una elipse centrada en el punto  $(x_0, y_0)$  y de semiejes  $a$  y  $b$  es  $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$

$p/(1 - e) - p/(1 + e) = 2ep/(1 - e^2)$ : El hecho de que los planetas describen órbitas elípticas con el Sol en uno de sus focos se conoce como primera *ley de Kepler*.

Notemos que si el cuerpo que genera el campo gravitatorio (en este caso  $m'$ ) tiene un radio  $R$ , la trayectoria elíptica se desarrollará en forma completa en tanto la distancia mínima  $r = p/(1 + e)$  sea mayor que  $R$ . De lo contrario, el cuerpo de masa  $m$  termina cayendo sobre la superficie del cuerpo de masa  $m'$ .

En general, observemos que la existencia de un radio mínimo y uno máximo resulta natural a partir de la analogía de la parte radial del movimiento con un problema unidimensional. Dada la forma de la energía potencial efectiva, para  $U_{efmin} < E < 0$  hay dos puntos de retorno, que corresponden a los dos valores de  $r$  donde la velocidad radial  $v_r = dr/dt$  se anula. El movimiento se encuentra entonces limitado por dichos valores de la distancia al centro.

A modo de ilustración, a continuación damos los valores de la excentricidad para las órbitas de los planetas del sistema solar:

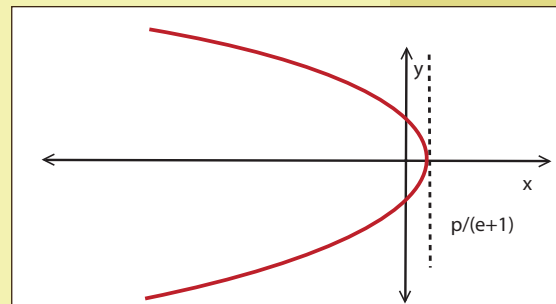
Planeta	e
Mercurio	0,206
Venus	0,007
Tierra	0,017
Marte	0,093
Júpiter	0,048
Saturno	0,056
Urano	0,046
Neptuno	0,009
Plutón	0,780

Para darnos una idea del significado de estos números, comparemos la diferencia  $r_{max} - r_{min} = 2ep/(1 - e^2)$  con la distancia máxima al centro  $r_{max} = p/(1 - e)$ . El cociente entre estas cantidades es igual a  $2e/(1+e)$ , y por ejemplo para la Tierra es igual a 0,033, mientras que para Mercurio es igual a 0,342. Esto significa que en el caso de la Tierra la diferencia entre la distancia máxima y la mínima es apenas el 3% de la distancia máxima, en tanto que para el caso de Mercurio dicha proporción llega al 34%.

4. Si  $E > 0$  se tiene  $e > 1$ . Por lo tanto, la distancia mínima al centro es  $r = p/(1 + e)$ , que se alcanza cuando  $\vartheta = 0$ , mientras que cuando  $\cos \vartheta = -1/e$  el radio  $r$  tiende a infinito. Esto significa que los ángulos más allá de los que cumplen esa igualdad no se alcanzan nunca. Como en este caso  $1 - e^2 < 0$ , pueden seguirse los mismos pasos del caso anterior para obtener:

$$\frac{(x - ep/(e^2 - 1))^2}{p^2/(e^2 - 1)^2} - \frac{y^2}{p^2/(e^2 - 1)} = 1 \quad (4.21)$$

Tenemos así la ecuación de una hipérbola<sup>34</sup> simétrica respecto del eje  $x$ , tal que  $x$  puede tomar todos los valores menores o iguales que  $p/(e + 1)$ , y que pasa por  $x = p/(e + 1)$  cuando  $y = 0$  (ver figura 4.4).



**Figura 4.4.** Para  $E > 0$  la trayectoria es una hipérbola de vértice  $x = p/1+e$ .

<sup>34</sup> En coordenadas cartesianas, la ecuación de una hipérbola es de la forma general  $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$

Observemos que un movimiento ilimitado es esperable dado que, para  $E > 0$ , existe un único punto donde  $E = U_{ef}$ , y por lo tanto donde se anula la velocidad radial.

La analogía de la parte radial con un problema unidimensional asegura que más allá de dicho radio todas las distancias al centro pueden ser alcanzadas si se espera el tiempo suficiente.

Entonces, podemos concluir que para energías menores que cero el movimiento es limitado o ligado, mientras que para energías mayores o iguales que cero el movimiento es ilimitado. Las trayectorias de los movimientos limitados pueden ser elipses o circunferencias; esto último sólo es posible en el caso particular en que la energía coincide exactamente con el valor mínimo del potencial efectivo. Las trayectorias de los movimientos ilimitados pueden ser hipérbolas o parábolas; la trayectoria parabólica corresponde a la situación en que la energía es exactamente cero. En el caso del movimiento parabólico, cuando  $r$  tiende al infinito la energía cinética tiende a cero; en el movimiento hiperbólico, en cambio, la energía cinética es siempre mayor que cero.

---

## □ Problemas

---

Problema 1. En la práctica, en lugar de los valores de las constantes de movimiento  $E$  y  $M$  es usual tener como datos las condiciones iniciales en términos de velocidades y distancias. Supongamos que en cierto instante un satélite en órbita alrededor de la Tierra se encuentra a una altura  $A$  por encima de la superficie, moviéndose con velocidad tangencial igual a  $v_0$  y -en ese instante- con velocidad radial nula. Queremos determinar entonces el parámetro  $p$  y la excentricidad  $e$  de la órbita.

Problema 2. Como hemos visto, para energías mayores o iguales que cero el movimiento es ilimitado. ¿Cuál será la expresión de la velocidad mínima que debe tener un cuerpo para escapar al infinito? ¿Dependerá dicha velocidad de que el objeto se lance en dirección radial o en dirección perpendicular al radio?

Problema 3. Supongamos que se quiere poner un satélite en órbita alrededor de la Tierra, evitando que descienda hasta donde el rozamiento con las capas superiores de la atmósfera pueda producir un frenado relevante. En general, los satélites se ponen en órbita dándoles una velocidad inicial en la dirección perpendicular al radio. ¿Cuál debería ser en ese caso el valor de la velocidad inicial para evitar que un satélite lanzado desde una altura de 500 km descienda por debajo de los 300 km?

---

## □ 4.3. Períodos y tercera ley de Kepler

---

Para los movimientos ligados en un campo gravitatorio (trayectorias circulares y elípticas), existe una relación precisa entre los tiempos y las distancias características, esto es, entre los períodos y las longitudes de las trayectorias, o distancias relacionadas con las

mismas. En el caso del movimiento circular es muy sencillo recuperar la relación entre los períodos y los radios de las órbitas que, como vimos, juega un papel importante en el camino que lleva a la formulación de la ley de gravedad de Newton. En efecto, en ese caso tenemos que el radio de la órbita es igual al parámetro  $p$ :

$$r = p = \frac{M^2}{m\alpha} \quad (4.22)$$

y escribiendo  $M = mrv_t = mr^2\Omega = mr^2(2\pi/T)$  con  $\Omega$  la velocidad angular y  $T$  el período, tenemos:

$$r = \frac{m4\pi^2r^4}{\alpha T^2} \quad (4.23)$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2m}{\alpha} r^3 \quad (4.24)$$

De este modo queda probado que el cuadrado del período de una órbita circular es proporcional al cubo del radio de la misma.

Para las órbitas elípticas puede encontrarse una relación similar en términos de los semiejes de la elipse. En efecto, la constancia del impulso angular puede traducirse como la constancia de la velocidad areolar  $dA/dt = M/2m$  (véase en el capítulo anterior el tratamiento general del movimiento en un campo central). En el caso de una trayectoria elíptica, el área barrida en una vuelta alrededor del centro es igual a  $\pi ab$ , donde  $a$  y  $b$  son las longitudes de los semiejes de la elipse. Ahora bien, la velocidad areolar es simplemente el cociente del área y el período, de modo que:

$$\frac{M}{2m} = \frac{dA}{dt} = \frac{\pi ab}{T} \quad (4.25)$$

Dado que  $a = p/(1 - e^2)$  y  $b = p/\sqrt{1 - e^2}$ , entonces:

$$b = \sqrt{ap} \quad (4.26)$$

y reemplazando tenemos:

$$\frac{M}{2m} = \frac{\pi a^{3/2} p^{1/2}}{T} \quad (4.27)$$

Así, escribiendo  $p = M^2/m\alpha$  finalmente resulta que  $T = 2\pi a^{3/2} \sqrt{m/\alpha}$ , o, lo que es equivalente:

$$T^2 = \frac{4\pi^2m}{\alpha} a^3 \quad (4.28)$$

El cuadrado del período de una órbita elíptica resulta entonces proporcional al cubo de la longitud del semieje mayor de la elipse (*tercera ley de Kepler*).

---

## □ Problemas

---

Problema 4. Un satélite *geoestacionario* es el que permanece siempre sobre el mismo punto de la superficie de la Tierra. Queremos comprobar que la órbita debe ser circular, y a partir de ello determinar la altura de tal satélite sobre la superficie terrestre.

Problema 5. El período de la Luna en su órbita alrededor de la Tierra es de poco menos de 27 días y 8 horas, en tanto que en su perigeo <sup>35</sup> se encuentra a una distancia de aproximadamente 363.000 km. A partir de estos datos, proponemos calcular los valores del parámetro  $p$  y la excentricidad  $e$  de la órbita lunar.

Problema 6. A partir de los datos y resultados del problema anterior proponemos calcular el diámetro angular de la Luna vista desde la Tierra, cuando se encuentra en el apogeo y en el perigeo (el radio de la Luna es de unos 1.737 km).

---

## □ 4.4. Independencia de la masa

---

En la forma de presentar los resultados de las secciones anteriores no se refleja de manera explícita el hecho de que el movimiento de un cuerpo en un campo gravitatorio es independiente de su masa. Para hacer manifiesto ese hecho reescribiremos los resultados para un cuerpo de masa  $m$  aprovechando la constancia de la energía y el impulso angular (y la consecuente constancia de la velocidad areolar). Para empezar, como  $M$  se conserva podemos escribir la velocidad areolar en términos de la velocidad angular y el radio iniciales (indicados por el subíndice 0):

$$\frac{M}{2m} = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\Omega_0 r_0^2 \quad (4.29)$$

de donde:

$$M^2 = m^2 \Omega_0^2 r_0^4 \quad (4.30)$$

Si a continuación reemplazamos  $M^2$  y  $\alpha = Gm'm$  en la energía, obtenemos:

$$E = \frac{1}{2}mv_{r_0}^2 - \frac{Gm'm}{r_0} + \frac{1}{2}m\Omega_0^2 r_0^2 \quad (4.31)$$

donde  $v_{r_0}$  es el valor inicial de la velocidad radial. De esta manera, las fórmulas del parámetro  $p$  y la excentricidad  $e$  nos dan:

$$p = \frac{M^2}{Gm'm^2} = \frac{1}{Gm'}\Omega_0^2 r_0^4 \quad (4.32)$$

---

<sup>35</sup> Se llama así a la distancia mínima respecto del centro de la Tierra; la máxima se llama apogeo.

$$e = \sqrt{1 + \frac{\Omega_0^2 r_0^4}{G^2 m^2} \left( v_{r0}^2 + \Omega_0^2 r_0^2 - \frac{2Gm'}{r_0} \right)} \quad (4.33)$$

con lo que queda de manifiesto que la trayectoria del cuerpo es independiente de su masa  $m$  (pero no lo es, por supuesto, de la masa  $m'$ ). En efecto, reemplazando en la ecuación de la trayectoria se obtiene:

$$r = \frac{\Omega_0^2 r_0^4 / (Gm')}{1 + \cos \varnothing \sqrt{1 + \Omega_0^2 r_0^4 (v_{r0}^2 + \Omega_0^2 r_0^2 - 2Gm' / r_0) / (Gm')^2}} \quad (4.34)$$

La masa  $m$  no aparece. Las únicas variables de esta igualdad son la distancia  $r$  al centro y el ángulo  $\varnothing$  medido respecto del eje  $x$ . Todas las demás cantidades (además de la masa  $m'$  del cuerpo en el centro del campo y la constante universal de la gravitación  $G$ ) son constantes que caracterizan las condiciones iniciales del problema.

Análogamente, podemos reemplazar  $\alpha = Gm'm$  en las expresiones del período de las órbitas; para las órbitas circulares obtenemos:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{Gm'} r^3 \quad (4.35)$$

donde  $r$  es el radio de la circunferencia, y para las elípticas:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{Gm'} a^3 \quad (4.36)$$

donde  $a$  es el semieje mayor de la elipse. Estas expresiones ponen de manifiesto la independencia del período con la masa del cuerpo en órbita, así como la dependencia del cuadrado del mismo, con la inversa de la masa  $m'$  situada en el centro del campo.

---

## □ 4.5. Perturbación de una órbita circular

---

### 4.5.1 Tratamiento general

---

Es claro que puede ser de interés obtener una descripción detallada de lo que ocurre cuando a una órbita dada en un campo gravitatorio central se la perturba modificando los valores del impulso angular y la energía. En lo que sigue, nos ocuparemos de resolver dicho problema a partir de una trayectoria circular a una dada distancia del centro, es decir una trayectoria tal que el parámetro y la excentricidad son:

$$p = \frac{M^2}{ma} = r_0, \quad e = 0 \quad (4.37)$$

y la energía es igual a:

$$E = \frac{M^2}{2mr_0^2} - \frac{\alpha}{r_0} \quad (4.38)$$

Nos restringiremos a estudiar el caso en que la perturbación del movimiento se limita a un cambio en la velocidad tangencial, sin modificar inicialmente la distancia al centro ni introducir una velocidad radial (por cierto, en el movimiento ulterior del cuerpo la velocidad radial será en general no nula). Además, supondremos que la variación de los parámetros que caracterizan el movimiento se produce en un intervalo de tiempo mucho menor que el de una órbita completa; de esta manera podemos no tomar en cuenta la transición de unos valores a otros en el análisis del movimiento, y suponer que el cambio es "instantáneo". Para el nuevo movimiento valen entonces las condiciones iniciales:

$$v_r = v_{r_0} = 0, \quad r = r_0 \quad (4.39)$$

Los nuevos valores del impulso angular y la energía pueden escribirse:

$$M' = M + \delta M, \quad E' = E + \delta E \quad (4.40)$$

donde  $\delta E$  y  $\delta M$  están relacionados entre sí como se verá más abajo. Supondremos que  $|\delta M| < M$ ; incluir  $|\delta M| \geq M$  tendría como resultado tomar en cuenta la posibilidad de una inversión del sentido de giro, la cual no introduce ninguna diferencia conceptualmente relevante. Los nuevos parámetros de la órbita son entonces:

$$p' = \frac{M'^2}{m\alpha}, \quad e' = \sqrt{1 + 2E' M'^2 / (m\alpha^2)} \quad (4.41)$$

donde la nueva energía y el cuadrado del nuevo impulso angular están dados por:

$$E' = \frac{M'^2}{2mr_0^2} - \frac{\alpha}{r_0}, \quad M'^2 = (M + \delta M)^2 \quad (4.42)$$

de modo que  $\delta E$  queda determinada por  $\delta M$ . Para obtener efectivamente la excentricidad en términos de  $\delta M$ , notemos que así como podemos escribir:

$$EM^2 = M^2 \left( \frac{M^2}{2mr_0^2} - \frac{\alpha}{r_0} \right) \quad (4.43)$$

de acuerdo con las condiciones iniciales (4.39) vale una relación análoga para  $E'$  y  $M'$ :

$$E' M'^2 = M'^2 \left( \frac{M'^2}{2mr_0^2} - \frac{\alpha}{r_0} \right) \quad (4.44)$$

Desarrollamos esta igualdad:

$$\begin{aligned}
 E' M'^2 &= M'^2 \left( \frac{M'^2}{2mr_0^2} - \frac{\alpha}{r_0} \right) \\
 &= (M + \delta M)^2 \left( \frac{(M + \delta M)^2}{2mr_0^2} - \frac{\alpha}{r_0} \right) \\
 &= M^2 \left( \frac{M^2}{2mr_0^2} - \frac{\alpha}{r_0} \right) + \frac{4M^3 \delta M + 6M^2 \delta M^2 + 4M \delta M^3 + \delta M^4}{2mr_0^2} - \frac{2\alpha M \delta M + \alpha \delta M^2}{r_0} \\
 &= EM^2 + \frac{4M^3 \delta M + 6M^2 \delta M^2 + 4M \delta M^3 + \delta M^4}{2mr_0^2} - \frac{2\alpha M \delta M + \alpha \delta M^2}{r_0} \\
 &= EM^2 + m\alpha^2 \left( \frac{2\delta M^2}{M^2} + \frac{2\delta M^3}{M^3} + \frac{\delta M^4}{2M^4} \right) \tag{4.45}
 \end{aligned}$$

donde hemos usado que  $r_0 = M^2/m\alpha$  para agrupar y cancelar términos. Reemplazando  $M^2 = m\alpha r_0$  en la expresión de la energía se obtiene:

$$EM^2 = -\frac{m\alpha^2}{2} \tag{4.46}$$

de modo que la nueva excentricidad  $e' \neq 0$  está dada por:

$$\begin{aligned}
 e' &= \sqrt{1 + \frac{2E' M'^2}{m\alpha^2}} \\
 &= \sqrt{1 - 1 + \frac{4\delta M^2}{M^2} + \frac{4\delta M^3}{M^3} + \frac{\delta M^4}{M^4}} \\
 &= 2 \frac{|\delta M|}{M} \sqrt{1 + \frac{\delta M}{M} + \frac{\delta M^2}{4M^2}} \tag{4.47}
 \end{aligned}$$

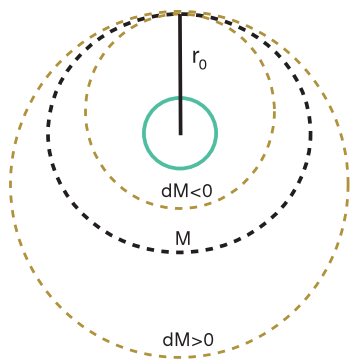
La raíz es igual al módulo  $|1 + \delta M/(2M)|$ , y como  $|\delta M| < M$ , podemos escribir simplemente:

$$e' = 2 \frac{|\delta M|}{M} \left( 1 + \frac{\delta M}{2M} \right) \tag{4.48}$$

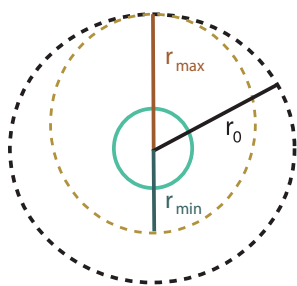
Por otra parte, el nuevo parámetro puede escribirse en términos de  $r_0$  y la variación del impulso angular:

$$\begin{aligned}
 p' &= \frac{(M + \delta M)^2}{m\alpha} \\
 &= \frac{M^2(1 + \delta M/M)^2}{m\alpha} \\
 &= r_0 \left( 1 + \frac{\delta M}{M} \right)^2 \tag{4.49}
 \end{aligned}$$

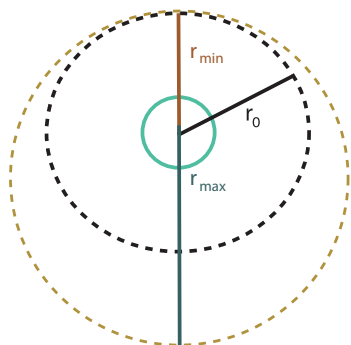




**Figura 4.5.** Apartamientos de la órbita circular de radio  $r_0$  e impulso angular  $M$ . Las órbitas perturbadas ( $\delta M < 0$  y  $\delta M > 0$ ) son elípticas.



**Figura 4.6.** El radio de la órbita circular  $r_0$  es igual al afelio ( $r_{\max}$ ) en la órbita perturbada con  $\delta M < 0$ .



**Figura 4.7.** El radio de la órbita circular  $r_0$  es igual al perihelio ( $r_{\min}$ ) en la órbita perturbada con  $\delta M > 0$ .

De esta manera, al perturbar la trayectoria circular (de radio  $r_0$ ) de modo que las nuevas condiciones iniciales son  $r = r_0$ ,  $v_r = 0$  y  $M' = M + \delta M$ , tenemos una trayectoria caracterizada por nuevos valores del parámetro y la excentricidad que están dados por las expresiones (4.48) y (4.49).

Como las únicas trayectorias posibles en un campo gravitatorio central son circunferencias, elipses, parábolas o hipérbolas, se puede demostrar que en el caso  $M' < M$  (es decir  $\delta M < 0$  y por lo tanto  $|\delta M| = -\delta M$ ) se tiene  $e' < 1$  (véase el problema al final de esta sección), entonces  $r_0$  es el radio máximo en una trayectoria elíptica; en otras palabras, la distancia inicial al centro corresponde al afelio de la nueva órbita. En efecto, para  $e' < 1$  la trayectoria es elíptica con un parámetro  $p'$  y la distancia máxima al centro es:

$$r_{\max} = \frac{p'}{1 - e'} \quad (4.50)$$

Reemplazando  $p' = (M + \delta M)^2 / (m\alpha)$  y  $e'$  de acuerdo con la igualdad (4.48) tenemos:

$$\begin{aligned} r_{\max} &= \frac{(M + \delta M)^2}{m\alpha (1 - 2|\delta M|/M (1 + \delta M/(2M)))} \\ &= \frac{M^2(1 + \delta M/M)^2}{m\alpha (1 + 2\delta M/M + \delta M^2/M^2)} \\ &= \frac{M^2(1 + \delta M/M)^2}{m\alpha (1 + \delta M/M)^2} \\ &= \frac{M^2}{m\alpha} \quad (4.51) \end{aligned}$$

que es el valor original  $p$  del parámetro, el cual para la órbita circular coincide con  $r_0$ . En la ecuación anterior se tuvo en cuenta que  $dM < 0$  al sacar las barras del módulo.

De manera totalmente análoga se puede comprobar que si  $M' > M$ , en tanto siga siendo  $e' < 1$ , la distancia inicial  $r_0$  es ahora el radio mínimo en la trayectoria elíptica que resulta de la perturbación; en otras palabras: para  $\delta M > 0$ ,  $e' < 1$ , la distancia  $r_0$  corresponde al perihelio de la nueva órbita elíptica (véase las figuras 4.5, 4.6, 4.7).

## □ Problema 7

En el texto se señaló que cuando  $\delta M < 0$  ( $|\delta M| < M$ ) se tiene  $e' < 1$ . Proponemos verificar dicha afirmación reescribiendo de manera adecuada la relación cuadrática que existe entre la nueva excentricidad  $e'$  y la variación  $\delta M$ .

### □ 4.5.2 Caída a la superficie

A partir del análisis general realizado es posible estudiar el ejemplo, de gran interés físico, de un cuerpo que, a partir de una órbita circular alrededor de otro, cae a la superficie del mismo debido a una perturbación que reduce su impulso angular (y, consistentemente, también su energía). Como vimos, si la perturbación reduce el impulso angular ( $\delta M < 0$ ) sin introducir una velocidad radial inicial en el nuevo movimiento, la nueva trayectoria es una elipse. Entonces, el cuerpo comienza a una distancia del centro:

$$r_0 = \frac{p'}{1 - e'} \quad (4.52)$$

y reduce la misma hasta, en principio, alcanzar el perihelio cuando  $r$  alcanza el valor mínimo:

$$r_{\min} = \frac{p'}{1 + e'} \quad (4.53)$$

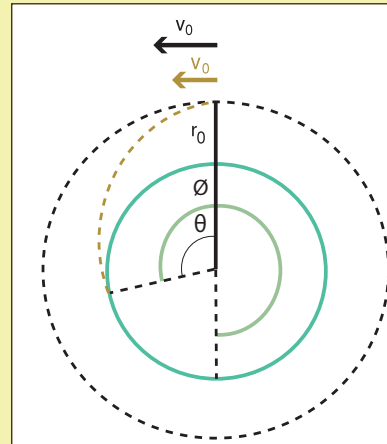
Esto último ocurre, claro está, en tanto el valor de la distancia mínima no sea menor que el radio  $R$  del cuerpo esférico alrededor del cual gira el cuerpo cuyo movimiento estamos estudiando. En el caso en que resulta  $r_{\min} < R$ , entonces la trayectoria elíptica se interrumpe cuando  $r = R$ . Recordando que la ecuación de la trayectoria es:

$$r = \frac{p'}{1 + e' \cos \vartheta} \quad (4.54)$$

donde  $\vartheta$  se mide desde la posición del perihelio, entonces si queremos hallar el ángulo  $\theta$  barrido desde el afelio (la distancia máxima) hasta llegar a la superficie debemos igualar  $r = R$  en la (4.54), despejar  $\vartheta$ , y al resultado restar un ángulo  $\pi$ , igual al que se barre al ir del perihelio al afelio (véase la figura 4.8).

Por lo tanto:

$$\theta = \arccos \left( \frac{p' - R}{e'R} \right) - \pi \quad (4.55)$$



**Figura 4.8.** Caída de un cuerpo sobre un planeta al modificar su impulso angular.  $\theta$  es el ángulo medido desde el punto donde se produce la perturbación,  $\vartheta$  es el ángulo polar.

Esta expresión da la solución al problema de determinar la posición de caída de un cuerpo que se encontraba realizando una trayectoria circular a cierta distancia de otro de radio  $R$ . Para poder utilizarla se requiere conocer las constantes  $e'$  y  $p'$  que caracterizan a la elipse de la nueva trayectoria, y que están definidas por las ecuaciones (4.48) y (4.49).

Dichas ecuaciones dan  $e'$  y  $p'$  en términos de la distancia inicial y la variación del impulso angular debida a la perturbación de la órbita originalmente circular.

En el caso de un cuerpo que cae sobre un planeta cabe la siguiente aclaración: el ángulo  $\theta$  (ver figura 4.8) está medido desde el punto donde se produce la perturbación; no coincide, en general, con el ángulo medido por un observador situado en la superficie del planeta sobre el cual cae el cuerpo, debido a la rotación del propio planeta alrededor del eje que pasa por sus polos. El ángulo  $\theta$  sólo sería aproximadamente igual al que mide un observador tal si el planeta tiene una velocidad angular  $\Omega_p$  mucho menor que la inicial del cuerpo. De no ser así, el cálculo se complica un poco, excepto si el cuerpo que cae se encontraba inicialmente orbitando alrededor del ecuador. En ese caso particular, para hallar el ángulo  $\theta'$  medido por un observador sobre el planeta hay que restar o sumar (según el planeta y el cuerpo giren en el mismo sentido o en sentidos opuestos) al valor de  $\theta$  el ángulo  $\Omega_p \Delta t$ , donde  $\Delta t$  es el tiempo que tarda el cuerpo en descender desde el radio inicial  $r_0$  hasta el radio  $R$  correspondiente a la superficie:

$$\theta' = \theta \mp \Omega_p \Delta t \quad (4.56)$$

Determinar el tiempo de caída requiere usar la fórmula (2.54) que relaciona el intervalo de tiempo con una variación de la distancia, para el caso particular de  $U(r) = -\alpha/r$ , e integrando entre los dos radios:

$$\Delta t = \sqrt{m/2} \int_R^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{E' + \alpha/r - M'^2/2mr^2}} \quad (4.57)$$

Notemos que, por supuesto, los resultados obtenidos hasta aquí y en lo que sigue son válidos en tanto se pueda despreciar cualquier otra fuerza que actúe durante la caída. En el caso de un cuerpo que cae sobre un planeta con atmósfera, el efecto de frenado debido a la misma debería ser tomado también en cuenta; el cálculo puede complicarse entonces considerablemente.

---

### □ 4.5.3 Escape al infinito

---

Si la órbita originalmente circular se perturba de modo tal que el impulso angular aumenta ( $\delta M > 0$ ), es posible que la nueva trayectoria sea la de un movimiento ilimitado. De acuerdo con la discusión general precedente, esto ocurre si la nueva excentricidad  $e'$  resulta igual o mayor que la unidad (si  $e' = 1$  la trayectoria es una parábola y si  $e' > 1$  la trayectoria es una hipérbola). El valor mínimo de  $\delta M$  tal que el movimiento es ilimitado se obtiene de igualar  $e' = 1$ , es decir:

$$1 = 2 \frac{\delta M}{M} \left( 1 + \frac{\delta M}{2M} \right) \quad (4.58)$$

De aquí resulta que:

$$\delta M = M (\sqrt{2} - 1) \quad (4.59)$$

De este modo, para una variación del impulso angular dada por esta relación con el valor original (de la trayectoria no perturbada), la nueva trayectoria es una parábola, mientras que para valores mayores la nueva trayectoria es una hipérbola.

---

## □ Problema 8

---

Para un valor inicial  $v$  de la velocidad en una órbita circular, i) calculemos el incremento de dicha velocidad tal que la nueva trayectoria sea una hipérbola con excentricidad  $e' > 1$ , e ii) obtengamos el módulo de la velocidad del cuerpo cuando se encuentra muy lejos del centro.

# 5. Sistemas inerciales y no inerciales

## □ 5.1. Sistemas inerciales y principio de relatividad de Galileo

El conjunto de cuerpos respecto de los cuales se describe el movimiento se denomina sistema de referencia, y los sistemas tales que en ellos se verifica la ley de inercia se denominan *inerciales*. Es fácil ver que cualquier sistema que se traslade uniformemente respecto de un sistema inercial es también inercial. En efecto, imaginemos un objeto libre de fuerzas que se mueve con una velocidad  $\vec{v}$  respecto de un sistema inercial K, y supongamos que otro sistema K' se traslada respecto de K con una velocidad constante  $\vec{V}$ . Como sobre el objeto no actúan fuerzas y el sistema K es inercial, la velocidad  $\vec{v}$  permanecerá constante. Entonces, el objeto libre se moverá de manera uniforme también respecto de K', y por lo tanto este sistema también es inercial.

Al estudiar el movimiento libre de un cuerpo no podemos diferenciar entre los distintos sistemas inerciales. La experiencia muestra que todas las leyes de la mecánica resultan las mismas en todos los sistemas inerciales, y este hecho recibe el nombre de *principio de relatividad de Galileo*. En la práctica, significa que un observador situado en el interior de un recinto cerrado no puede distinguir, a través de ningún experimento mecánico, si el recinto está en reposo o se traslada con velocidad constante; en cambio, sí puede distinguir el movimiento uniforme del movimiento acelerado.

## □ 5.2. Sistemas en movimiento rectilíneo acelerado

### 5.2.1 Ecuaciones de la dinámica

Consideremos un sistema de referencia K' que se traslada con una velocidad variable  $\vec{V}(t)$  respecto de un sistema inercial K. De acuerdo con el principio de inercia, un objeto libre de fuerzas se moverá con una velocidad  $\vec{v}$  constante respecto del sistema K. La velocidad  $\vec{v}'$  del objeto respecto del sistema acelerado K' verifica la suma galileana de velocidades:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}(t) \quad (5.1)$$

Por lo tanto,  $\vec{v}'$  no puede ser constante. Esto significa que en el sistema K' no se cumple la ley de inercia, ya que respecto de K' un objeto libre de fuerzas no se mueve uniformemente. Entonces, K' es un sistema de referencia no inercial.

Supongamos que, en un instante dado la aceleración del sistema  $K'$  respecto del sistema  $K$  es  $\vec{A}$ . Como un objeto libre conserva su velocidad constante respecto del sistema inercial  $K$ , respecto del sistema  $K'$  tendrá una aceleración  $\vec{a}' = -\vec{A}$ . Es claro que la aceleración que adquiere un objeto respecto del sistema  $K'$  no depende de ninguna propiedad del objeto; en particular,  $\vec{a}'$  no depende de la masa del objeto. Este hecho permite, como veremos más adelante, establecer una analogía muy importante entre el movimiento en un sistema no inercial y el movimiento en un campo gravitatorio ya que, como sabemos desde Galileo, en un campo gravitatorio todos los cuerpos, independientemente de sus masas, adquieren la misma aceleración.

Las leyes de la mecánica, tal como se las formula en los sistemas inerciales, no valen, evidentemente, en un sistema acelerado. Sin embargo, las ecuaciones dinámicas pueden modificarse de manera tal que sean válidas también para el movimiento de un objeto respecto de un sistema no inercial  $K'$ ; basta introducir una fuerza  $\vec{F}^*$ , llamada fuerza inercial, proporcional a la masa del cuerpo y a la aceleración  $-\vec{A}$  que adquiere respecto de  $K'$  si se encuentra libre de interacciones:

$$\vec{F}^* = -m\vec{A} \quad (5.2)$$

Es importante observar que la fuerza inercial  $\vec{F}^*$  se diferencia de las fuerzas asociadas a interacciones en dos aspectos fundamentales:

- Como la fuerza  $\vec{F}^*$  no se asocia a una interacción, no existe una fuerza  $-\vec{F}^*$ , aplicada en algún otro cuerpo, que sea la reacción correspondiente a  $\vec{F}^*$ .
- La existencia de la fuerza inercial depende del sistema considerado. En el sistema inercial la ley de Newton para un objeto libre se escribe:

$$\sum \vec{F} = 0 = m\vec{a} \quad (5.3)$$

En cambio, en el sistema acelerado se escribe:

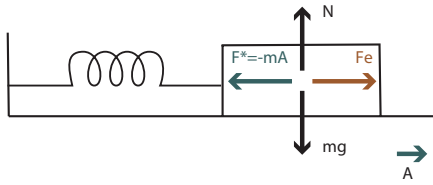
$$\sum \vec{F}' = \vec{F}^* = m\vec{a}' \quad (5.4)$$

con la fuerza inercial:

$$\vec{F}^* = -m\vec{A}$$

## 5.2.2 Ejemplos

1. Consideremos un aparato formado por un objeto de masa  $m$  situado sobre un plano horizontal de rozamiento despreciable, y unido a un extremo de un resorte de constante elástica  $k$  y longitud natural  $l_0$ . Este aparato, levemente modificado, puede utilizarse para medir aceleraciones instantáneas, y de hecho, se lo instala en vehículos para medir, por ejemplo, la eficacia de los frenos; a menudo se lo llama "acelerómetro". Para entender su funcionamiento escribamos las ecuaciones dinámicas para el objeto de masa  $m$  en un sistema  $K'$  unido a un vehículo que acelera. A partir del diagrama de fuerzas (véase la figura 5.1 donde se considera que el resorte está inicialmente comprimido) tenemos:



**Figura 5.1.** Diagrama de fuerzas para una masa  $m$  unida a un resorte de constante elástica  $k$  y longitud  $l_0$  en un sistema no inercial.

$$\sum F'_x = k|l - l_0| - mA = ma' \quad (5.5)$$

$$\sum F'_y = N - mg = 0 \quad (5.6)$$

donde  $k|l - l_0|$  es el valor absoluto de la fuerza elástica,  $l$  es la longitud del resorte, y  $mA$  es el valor absoluto de la fuerza inercial  $\vec{F}^*$ . Cuando el objeto se encuentra en equilibrio respecto del sistema  $K'$  su aceleración  $a'$  es nula y se obtiene:

$$k|l - l_0| = mA \quad (5.7)$$

Por lo tanto: 
$$A = \frac{k}{m}|l - l_0| \quad (5.8)$$

y midiendo la longitud  $l$  del resorte cuando el objeto se encuentra en equilibrio puede determinarse la aceleración de  $K'$  respecto de un sistema inercial  $K$ .

- Como es sabido, un cuerpo de volumen  $V$  inmerso totalmente en un fluido de densidad  $\rho$  experimenta un empuje hacia arriba igual a  $\rho Vg$  (ley de Arquímedes). Este empuje sucede porque la presión debajo del cuerpo es mayor que la presión sobre el cuerpo y esto, a su vez, se debe a la fuerza peso ejercida por la Tierra sobre el fluido (ver figura 5.2 i). Un cuerpo de densidad  $\rho_c$  tiene un peso  $\rho_c Vg$ , y si  $\rho_c$  es menor que  $\rho$  el empuje resulta mayor que el peso y el cuerpo flota; en particular, si el cuerpo se encuentra inicialmente sumergido, se acelera hacia arriba hasta alcanzar la superficie.

Podemos preguntarnos qué ocurre si se tiene un objeto inmerso en un fluido y el recipiente que lo contiene se acelera uniformemente en la dirección horizontal. Si la aceleración del recipiente es  $A$ , en un sistema  $K'$ , no inercial fijo al recipiente, existe sobre el cuerpo una fuerza inercial:

$$F^* = -mA = -\rho_c V A \quad (5.9)$$

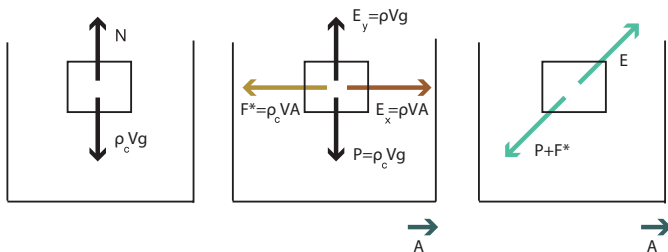
pero también hay un *empuje horizontal*:

$$E_x = \rho V A \quad (5.10)$$

debido a la diferencia de presiones entre ambos lados del cuerpo que surge como consecuencia de la fuerza inercial que actúa sobre el fluido (véase la figura 5.2).

Un aspecto interesante de esta situación es que si la densidad del cuerpo es menor que la del fluido el cuerpo no solamente flota sino que, como en ese caso, el empuje horizontal es mayor que la fuerza inercial, el cuerpo además se acelera en el

*mismo sentido* en que acelera el recipiente. Esto explica por qué, si se lleva un globo inflado con un gas menos denso que el aire dentro de un vehículo que aumenta su velocidad, el globo tiende a moverse, respecto del vehículo, "hacia adelante" y no "hacia atrás".



**Figura 5.2.** De izquierda a derecha: i) Ejemplo 2 en un sistema inercial. ii) Ejemplo 2 en un sistema no inercial. iii) Idem ii) con las fuerzas resultantes.

## □ 5.3. Sistemas de referencia rotantes

### 5.3.1 Fuerzas centrífuga y de Coriolis

Deducir la forma de las ecuaciones dinámicas para el movimiento de un cuerpo respecto de un sistema de referencia rotante requiere, en el caso más general, de un formalismo matemático algo complicado. Por lo tanto, en este párrafo basaremos nuestras deducciones en ejemplos sencillos y justificaremos la validez de los resultados obtenidos a partir de argumentos más bien intuitivos.

Consideremos primero un cuerpo que describe una circunferencia de radio  $r$  con una rapidez constante  $v$  medida en referencia a un sistema inercial  $K$ . Respecto de dicho sistema el cuerpo tendrá una aceleración:

$$a = -\frac{v^2}{r} \quad (5.11)$$

si consideramos como positivo el sentido en que aumenta  $r$  (es decir, del centro de la circunferencia hacia afuera). Respecto de un sistema  $K'$  cuyo origen coincide con el centro de la circunferencia y que rota con una velocidad angular  $\Omega$ , el cuerpo tiene una velocidad tangencial  $v'_T$  tal que  $v = v'_T + \Omega r$ , y su aceleración es:

$$a' = -\frac{v'^2_T}{r} \quad (5.12)$$

Luego, entre la aceleración del cuerpo respecto de  $K'$  y la aceleración respecto de  $K$  hay una diferencia:

$$a' - a = -\frac{v'^2_T}{r} - \left(-\frac{v^2}{r}\right) \quad (5.13)$$

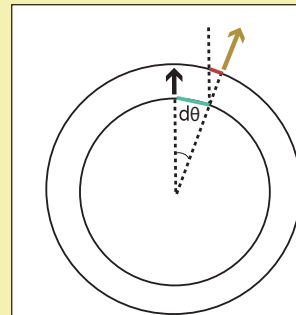
$$= -\frac{v'^2_T}{r} + \frac{(v'_T + \Omega r)^2}{r} \quad (5.14)$$

$$= \Omega^2 r + 2v'_T \Omega \quad (5.15)$$

Esta diferencia de aceleraciones entre ambos sistemas puede explicarse por la existencia en el sistema  $K'$  de una fuerza inercial:

$$F^* = m\Omega^2 R + 2mv'_T \Omega \quad (5.16)$$

que depende de la distancia del cuerpo al centro de la circunferencia y de su velocidad tangencial  $v'_T$  respecto del sistema rotante  $K'$ . El primer término corresponde a una fuerza radial que apunta de adentro hacia afuera, y se suele denominar *fuerza centrífuga*; el segundo término corresponde a una fuerza radial que apunta hacia afuera o hacia aden-



**Figura 5.3.** En negro: vector velocidad a tiempo inicial; en marrón: vector velocidad un instante  $dt$  posterior; en verde: "retraso" del cuerpo; en rojo: rotación del vector velocidad.



tro según  $v'_T$  sea positiva o negativa, y es la llamada *fuerza de Coriolis* para un cuerpo que se desplaza tangencialmente respecto de  $K'$ . Gustave Coriolis (1792 – 1843) fue un matemático y científico francés que, entre otras cosas, se dedicó a estudiar los conceptos de energía mecánica y trabajo de fuerzas en sistemas rotantes.

Ahora, consideremos un cuerpo libre que en cierto instante se mueve en dirección radial respecto del sistema rotante  $K'$  cuya velocidad angular es  $\Omega$ . Entonces, en el sistema  $K'$  el cuerpo inicialmente tiene sólo una velocidad radial  $v'_r$  y velocidad tangencial nula. Supongamos que, inicialmente, el cuerpo se encuentra a una distancia  $r$  del eje de rotación de  $K'$  y que  $v'_r$  es positiva; entonces, luego de un intervalo  $dt$  muy chico, el cuerpo se habrá desplazado radialmente una distancia:

$$dr = v'_r dt \quad (5.17)$$

y su vector velocidad (constante respecto de un sistema inercial), habrá rotado un ángulo  $d\theta = \Omega dt$  (ver Figura 5.3). Por otra parte, respecto de un sistema inercial, el cuerpo tiene inicialmente una velocidad tangencial  $\Omega r$  mientras que un punto de la circunferencia de radio  $r + dr$  que alcanza luego de un tiempo  $dt$  se mueve con una velocidad tangencial  $\Omega(r + dr)$ . Por lo tanto, cuando el cuerpo llega al radio  $r + dr$ , respecto de  $K'$  ha adquirido una velocidad tangencial  $dv'_T$ , que resulta de ambos efectos combinados: rotación del vector velocidad respecto del sistema  $K'$  ( $-v'_r \text{ sen } d\theta$ ) y "retraso" debido a que se alcanza un radio donde la velocidad tangencial de  $K'$  es mayor ( $-\Omega dr$ ) (ver Figura 5.3). Aproximando  $\text{sen } d\theta \approx d\theta$ , y escribiendo  $dr = v'_r dt$  tenemos:

$$dv'_T = -v'_r d\theta - \Omega v'_r dt \quad (5.18)$$

Así, dividiendo por  $dt$ , obtenemos la aceleración:

$$a' = \frac{dv'_T}{dt} = -2\Omega v'_r \quad (5.19)$$

ya que  $d\theta/dt = \Omega$ . De esta manera, en el sistema  $K'$  aparece sobre el cuerpo una fuerza tangencial proporcional a su velocidad radial:

$$F^* = -2mv'_r \Omega \quad (5.20)$$

Esta es la fuerza de Coriolis para un cuerpo que en cierto instante se mueve radialmente respecto de un sistema rotante. En el caso en que  $v'_r$  es positiva esta fuerza tiende a "retrasar" al cuerpo; por supuesto, si  $v'_r$  es negativa, es decir, si el cuerpo se acerca al eje de rotación, esta fuerza tiende a "adelantarlo".

En el caso general de un cuerpo que se mueve de cualquier manera respecto de un sistema que rota, aparece una fuerza inercial cuya componente radial está dada por la ecuación 5.16, y cuya componente tangencial está dada por la ecuación 5.20. La fuerza inercial depende de la posición del cuerpo y de las componentes radial y tangencial de su velocidad respecto del sistema rotante, pero no depende de la componente de su velocidad paralela al eje de rotación.

- Ejemplo. Consideremos un satélite geoestacionario, es decir, un satélite que se mantiene siempre sobre el mismo punto de la superficie terrestre. En primer lugar, recordemos que sus órbitas deben ser circulares: esto se deduce del hecho de que el satélite geoestacionario debe mantener su velocidad angular constante (igual a la de la Tierra), y entonces la conservación del impulso angular conduce a la constancia de la distancia al centro.

Respecto de un sistema inercial  $K$ , el satélite geoestacionario se mueve uniformemente sobre una circunferencia de radio  $r$  y la suma de fuerzas en la dirección radial se escribe:

$$-\frac{GM_T m_s}{r^2} = m_s a = m_s (-\Omega^2 r) \quad (5.21)$$

donde  $M_T$  y  $m_s$  son las masas de la Tierra y del satélite respectivamente y  $G$  es la constante universal de la gravitación.

En cambio, respecto de un sistema  $K'$  que rota con la Tierra, el satélite permanece en reposo y su aceleración es nula; pero existen, además de la atracción gravitatoria, fuerzas inerciales. La fuerza de Coriolis es nula, ya que la velocidad del satélite respecto de  $K'$  es cero, mientras que la fuerza centrífuga es igual a  $m\Omega^2 r$ . Luego, en el sistema  $K'$  la suma de fuerzas resulta:

$$-\frac{GM_T m_s}{r^2} + m_s \Omega^2 r = m_s a' = 0 \quad (5.22)$$

Es evidente que las ecuaciones 5.21 y 5.22, aunque tienen sentidos esencialmente distintos, conducen a los mismos resultados cuando se calcula con ellas el valor de cualquier magnitud.

Observemos que la ecuación 5.22 muestra la clave acerca de la "ingravedez" que experimentan los objetos en, por ejemplo, una estación orbital. La "ingravedez" no es ausencia de la fuerza peso, sino el resultado de que la fuerza centrífuga que aparece en el sistema no inercial de la estación orbital equilibra a la fuerza gravitatoria, dando una resultante nula (estrictamente, esto no ocurre en cualquier punto dentro de la nave; véase la sección siguiente).

---

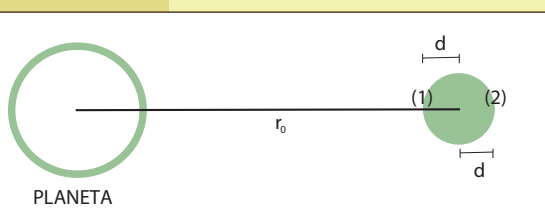
### 5.3.2 Fuerza de marea (2)

---

Planteemos el problema de un cuerpo extenso de masa  $m$  en órbita circular con velocidad angular  $\Omega$ , alrededor de un planeta de masa  $M$ . Supongamos que el cuerpo es homogéneo, de modo que todo pequeño volumen igual  $dV$  tiene la misma masa  $dm$ . En el sistema de referencia  $K'$  que gira con la misma velocidad angular  $\Omega$  (alrededor del mismo eje, por supuesto), la suma de fuerzas sobre una parte del cuerpo, cuya masa es  $dm$ , se escribe:

$$-\frac{GM dm}{r^2} + dm \Omega^2 r = dm a' \quad (5.23)$$

Esta ecuación permite observar que, como el cuerpo no es estrictamente puntual, si consideramos distintos puntos a lo largo del mismo en dirección radial, dichos puntos corresponderán a distintos valores del radio  $r$ . Existe un radio  $r_0$  tal que la suma de fuerzas sobre una masa  $dm$  situada a esa distancia es nula. Si tomamos valores un poco mayores, la fuerza gravitatoria es un poco menor, mientras que la fuerza centrífuga, al ser proporcional al radio, es un poco mayor. Lo opuesto ocurre si tomamos valores menores del radio. Por lo tanto, en general ambas fuerzas sólo se cancelan para un radio dado, mientras que para radios mayores la fuerza resultante apunta "hacia afuera" (es decir, en el sentido en que crece la distancia al centro), mientras que para radios menores la fuerza resultante apunta "hacia adentro" (es decir, en el sentido en que decrece la distancia al centro). En otras palabras, si  $r_0$  es el radio para el cual una parte de masa  $dm$  se encuentra en equilibrio, para  $r$  mayor o menor que  $r_0$  las partes del cuerpo tenderán a separarse. Para fijar ideas, tomemos dos partes del cuerpo a una distancia  $d$  de su centro como se muestra en la figura 5.4: la primera más cerca del planeta y la segunda más lejos. Escribamos la suma de fuerzas para las tres partes consideradas, es decir, la que está en equilibrio y las otras dos que tienden a separarse:



**Figura 5.4.** Fuerza gravitatoria que ejerce un planeta sobre distintas partes de un cuerpo extenso.

$$-\frac{GM dm}{r_0^2} + dm \Omega^2 r_0 = 0 \quad (5.24)$$

$$-\frac{GM dm}{(r_0 - d)^2} + dm \Omega^2 (r_0 - d) = dm a'_- \quad (5.25)$$

$$-\frac{GM dm}{(r_0 + d)^2} + dm \Omega^2 (r_0 + d) = dm a'_+ \quad (5.26)$$

donde  $a'_\pm$  indica la aceleración, medida en  $K'$ , de la masa  $dm$  ubicada más lejos o más cerca del planeta. La diferencia entre las fuerzas en distintos puntos es llamada usualmente

*fuerza de marea*<sup>36</sup>. Con esto, se puede obtener la aceleración que cada parte tendría respecto de las otras. Pero supongamos, lo cual es razonable en gran parte de los casos concretos, que  $d \ll r_0$ . Entonces, podemos escribir:  $(r_0 \pm d)^{-2} = r_0^{-2} (1 \pm d/r_0)^{-2} \approx r_0^{-2} (1 \mp 2d/r_0)$ , y cancelando la masa  $dm$  de las ecuaciones anteriores se obtienen las expresiones aproximadas:

$$-\frac{GM}{r_0^2} (1 + 2d/r_0) + \Omega^2 (r_0 - d) \simeq a'_- \quad (5.27)$$

$$-\frac{GM}{r_0^2} (1 - 2d/r_0) + \Omega^2 (r_0 + d) \simeq a'_+ \quad (5.28)$$

Utilizando la relación (5.24), se obtiene:

$$-3 \frac{GM d}{r_0^3} \simeq a'_- \quad (5.29)$$

$$3 \frac{GM d}{r_0^3} \simeq a'_+ \quad (5.30)$$

Cada una de estas igualdades aproximadas da la aceleración relativa que cada una de las partes consideradas tendría, respecto de la parte sobre la cual la suma de fuerzas es nula. Observe-

<sup>36</sup> Compárese con la discusión en la sección "Fuerza de marea (1)".

mos que el resultado es un poco mayor (por un factor  $3/2$ ) que el que habíamos obtenido sin tener en cuenta el movimiento del cuerpo (véase la sección "Fuerza de marea (1)", ecuación (3.27)). Evidentemente, la aceleración relativa entre las dos partes, que en principio no están en equilibrio, es igual a  $6GMd/r_0^3$ . En la práctica, un cuerpo extenso se mantiene unido debido a las fuerzas *internas*, es decir las que unas partes del mismo ejercen sobre las otras.

---

## □ Problemas

---

Problema 1: Un astronauta de masa  $m = 100$  kg se encuentra unido a una estación espacial de masa  $50 \times 10^3$  kg que se encuentra en órbita a una altura de 500 km, por medio de un cable. Se quiere determinar la tensión del cable necesaria para mantener al astronauta unido a la nave, a una distancia de 70 m en la dirección radial. ¿Es necesario tomar en cuenta la fuerza gravitatoria ejercida por la nave sobre el astronauta?

Problema 2: El radio de la Luna es de unos 1.737 km, su gravedad superficial es de aproximadamente  $1,62 \text{ m/s}^2$  y su distancia media a la Tierra es de unos 384.000 km. Se propone comparar la fuerza de marea -debida a la gravedad terrestre y a la fuerza centrífuga- entre una masa  $dm$  en el centro de la Luna y otra en la cara opuesta a la Tierra, con la fuerza que la propia Luna ejerce sobre la misma masa  $dm$  sobre la superficie.

---

## □ 5.4. El principio de equivalencia

---

Imaginemos una región en el espacio exterior, que se encuentra suficientemente alejada de estrellas y planetas de manera tal que la fuerza gravitatoria pueda suponerse nula. En esta región es posible elegir un sistema de referencia inercial, de manera que los cuerpos inicialmente en reposo, respecto de este sistema, permanezcan en reposo; y los cuerpos con movimiento rectilíneo y uniforme continúan siempre con este movimiento. Supongamos ahora que un observador equipado con un acelerómetro se encuentra dentro de una caja grande, del tamaño de una habitación. Sobre el observador no actúa ninguna fuerza gravitatoria. Por lo tanto, para permanecer en el suelo debería estar atado o fijado al mismo, porque de lo contrario cualquier impacto contra el suelo (por el principio de acción y reacción) lo impulsaría hacia el techo (en este caso la tapa de la caja). En el centro de la tapa de la caja (el techo de la habitación para el observador) y del lado exterior de la misma, se encuentra un gancho con una soga atada al mismo. Ahora supongamos que se ejerce una fuerza constante sobre la soga y por lo tanto sobre el techo de la caja. La fuerza sobre la soga se ejerce de manera tal que la misma tira de la caja para moverla hacia arriba. ¿Cuál será la descripción del movimiento para un observador situado afuera de la caja? Para este observador, la caja comenzará a moverse junto con el observador que se halla dentro con un movimiento uniformemente acelerado. ¿Cuál será la descripción del movimiento para un observador situado adentro de la caja? La aceleración de la caja se transmite a este observador a través de la fuerza de contacto ejercida por el piso de la misma. Por lo tanto, el observador notará que no necesita estar fijado o atado al piso de

la caja. Dicho de otra manera, el observador está parado sobre el piso de la caja de la misma manera que cualquier observador sobre la superficie de la tierra. Si lanza un cuerpo, la aceleración de la caja no se transmitirá a este cuerpo, y entonces dicho cuerpo caerá con movimiento acelerado para el observador. Si lanza varios cuerpos de distinta masa, composición y/o tamaño, observará que la aceleración que mide es siempre la misma. Entonces, el observador, que sabe que en un campo gravitatorio uniforme todos los objetos caen con la misma aceleración, concluirá que él y la caja se encuentran en un campo gravitatorio uniforme. La propiedad fundamental de la fuerza gravitatoria de imprimir a todos los cuerpos la misma aceleración independientemente de su masa, composición y/o tamaño, es la que permite que el observador dentro de la caja llegue a esta conclusión.

Supongamos ahora que se usa una soga fijada a la tapa de la caja del lado interior de la misma para colgar un cuerpo en su extremo libre. La soga ejercerá una tensión sobre el cuerpo, pero el mismo permanece en reposo respecto de la caja. Si preguntamos al observador en su interior por la fuerza que compensa la tensión de la soga, como el mismo cree que se encuentra en un campo gravitatorio dirá que es la fuerza gravitatoria, de manera que la intensidad de esta tensión será proporcional a la masa gravitatoria del cuerpo. A su vez, el observador externo a la caja dirá que la soga transmite al cuerpo el movimiento acelerado de la caja. La intensidad de la tensión de la soga, para este observador, será proporcional a la masa inercial del cuerpo. De esta manera, se deduce la necesidad de la igualdad entre masa gravitatoria y masa inercial.

El hecho de que las fuerzas inerciales producen aceleraciones independientes de las masas de los cuerpos, permite establecer una analogía entre los sistemas de referencia no inerciales y los campos gravitatorios: todo sistema no inercial equivale a cierto campo gravitatorio (*principio de equivalencia*). En la práctica esto hace posible anular, al menos localmente, un campo gravitatorio mediante una elección de un sistema de referencia adecuado: basta con elegir un sistema en movimiento acelerado cuya aceleración sea igual a la que adquiriría un objeto colocado en la región del campo que se está considerando. En particular, un campo uniforme y constante equivale a un sistema de referencia que se traslada con aceleración constante y, por lo tanto, puede ser anulado simultáneamente en todo el espacio. Estrictamente, no existen en la naturaleza campos gravitatorios uniformes; sin embargo, en la práctica se dan muchas situaciones en las cuales un campo uniforme es una muy buena aproximación a las condiciones reales.

# 6. Relatividad especial

## □ 6.1. introducción a la cinemática relativista

### 6.1.1 Introducción

Las transformaciones de Galileo relacionan las coordenadas  $\vec{r}$  de un cuerpo respecto de un sistema de referencia con las coordenadas  $\vec{r}'$  respecto de otro sistema que se traslada con velocidad  $\vec{V}$ , respecto del primero:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t \quad (6.1)$$

En estas transformaciones se supone que el tiempo transcurre de la misma forma en todos los sistemas de referencia. De las mismas, se deduce la suma galileana de velocidades:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V} \quad (6.2)$$

que relaciona las velocidades  $\vec{v}$  y  $\vec{v}'$  en ambos sistemas. De acuerdo con esta ley de adición de velocidades, la única velocidad que resultaría medida igual en todos los sistemas que se desplazaran unos respecto de otros sería la infinita. Sin embargo, numerosas experiencias han mostrado que cuando se mide la velocidad de propagación de una señal luminosa en el vacío el valor que se obtiene es siempre  $c = 300.000 \text{ km/s}$  (aproximadamente, ver Capítulo 1), sea cual fuere el sistema de referencia considerado. Como consecuencia de este hecho, se deduce que los intervalos de tiempo correspondientes a los mismos eventos son diferentes en sistemas de referencia que se mueven unos respecto de otros, y esto tiene consecuencias cinemáticas notables.

### 6.1.2 Dilatación del tiempo

Consideremos dos sistemas inerciales K y K' con sus ejes paralelos entre sí, moviéndose uno respecto de otro con una velocidad V a lo largo del eje x. En un instante  $t_0'$ , desde el origen del sistema K' se emite una señal luminosa que alcanza un espejo situado sobre el eje y' a una distancia A del origen, y regresa al punto de emisión en el instante  $t_1'$ . Es claro que el intervalo entre la partida y el regreso de la señal, medido en K'; es:

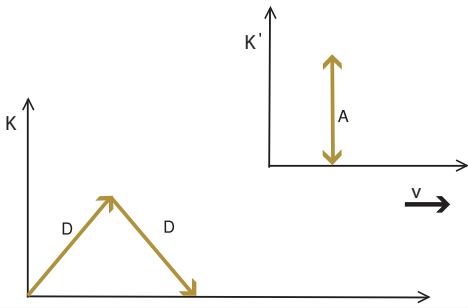
$$\Delta t' = t_1' - t_0' = \frac{2A}{c} \quad (6.3)$$

En el sistema K' la señal va y vuelve paralela al eje y'. Como dicho eje se traslada uniformemente respecto del sistema K, en K la señal describe una trayectoria formada por dos segmentos oblicuos, como se muestra en la figura 6.1. Por lo tanto, el intervalo temporal entre la partida y el regreso de la señal a la fuente, medido en el sistema K es:

$$\Delta t = t_1 - t_0 = \frac{2D}{c} \quad (6.4)$$

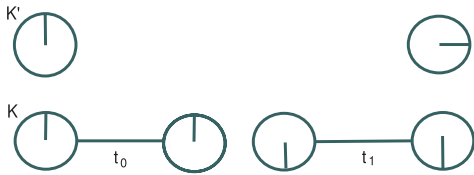
y resulta mayor que el intervalo medido en el sistema  $K'$ , ya que  $D$  es mayor que  $A$ , y la velocidad de propagación de la luz es igual a  $c$  en ambos sistemas.

A primera vista parecería que se está privilegiando a uno de los dos sistemas; de hecho, muchas veces la frase usual para describir la diferencia entre  $\Delta t$  y  $\Delta t'$  es "un reloj en  $K'$  atrasa respecto de un reloj en  $K$ ", lo que parece extraño cuando se piensa que para cada sistema es el otro el que se desplaza. La interpretación correcta es la siguiente:



**Figura 6.1.** Señal luminosa emitida en el sistema  $K'$  vista desde  $K$  y  $K'$ . El sistema de referencia  $K'$  se mueve con velocidad  $V$  respecto del sistema de referencia  $K$ .

Supongamos que a lo largo del eje  $x$  de  $K$  hay una serie de relojes sincronizados como se muestra en la figura 6.2. En un primer instante  $t_0$  un reloj del sistema  $K'$  pasa delante de uno de ellos; en ese instante los relojes enfrentados indican lo mismo. Para comparar el comportamiento de los relojes en distintos sistemas de referencia podemos comparar de nuevo la indicación del reloj de  $K'$  con la de uno en  $K$ ; pero entonces estamos comparando el reloj de  $K'$  con otro reloj de  $K$ ; aquél delante del cual pasa en un segundo instante  $t_1$ . En ese caso, se encuentra que el reloj en  $K'$  atrasa respecto del segundo reloj en  $K$ . Si procediéramos a la inversa, es decir, si se comparara un reloj de  $K$  con dos de  $K'$ ; se encontraría que el que atrasa es el reloj de  $K$ . Como vemos, el proceso de comparación no es simétrico, y el reloj que atrasa es el que se compara con diferentes relojes del otro sistema (véase la figura 6.2).



**Figura 6.2.** Un reloj en el sistema  $K'$  se compara con dos relojes sincronizados en el sistema  $K$ .

La necesidad de comparar un reloj de un sistema con diferentes relojes del otro es una consecuencia de restringir la elección de sistemas de referencia únicamente a los inerciales. En efecto, si se quisiera "volver atrás" para comparar un reloj de  $K'$  con el mismo reloj de  $K$  sería necesario que la velocidad relativa entre ambos sistemas cambiara de signo y, por lo tanto, al menos uno de los dos sistemas debería dejar de ser inercial. Si el sistema acelerado es  $K'$ , en un camino cerrado el reloj que atrasará es el de  $K'$ ; en efecto, tanto en el viaje de ida como en el de vuelta el reloj de  $K'$  irá atrasando respecto

de sucesivos relojes de  $K$  ante los cuales vaya pasando, y el razonamiento que conduciría al resultado contrario, comparando un reloj de  $K$  con varios de  $K'$  hasta volver al primero, no sería posible porque en este caso  $K'$  no es un sistema inercial.

A partir de la figura 6.1 es posible, mediante un cálculo simple que no requiere más que el teorema de Pitágoras y un poco de cinemática elemental, encontrar la relación entre los intervalos  $\Delta t'$  y  $\Delta t$  medidos en cada sistema. En el sistema  $K'$  la señal recorre una distancia  $L' = 2A$ . En el sistema  $K$ , en cambio, la señal recorre una distancia  $L = 2D = 2\sqrt{A^2 + (V \Delta t/2)^2}$ , ya que en el tiempo  $\Delta t$  el sistema  $K'$  se desplaza una distancia  $V \Delta t$  respecto del sistema  $K$ .

Como  $L' = 2A = c\Delta t'$  y  $L = 2D = c\Delta t$ , se obtiene, después de sencillos pasos algebraicos, que  $c\Delta t' = \sqrt{c^2 - V^2} \Delta t$ . Por lo tanto, los intervalos de tiempo entre la emisión y el regreso de la señal medidos en los sistemas  $K'$  y  $K$  están relacionados por:

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - V^2/c^2} \quad (6.5)$$

donde  $V$  es el valor absoluto de la velocidad de  $K'$  respecto de  $K$ . De este modo, el intervalo de tiempo entre dos eventos (emisión y regreso de la señal), medido en el sistema (en este caso  $K'$ ) en que ambos ocurren en el mismo punto, es menor que el intervalo de tiempo medido en el sistema (en este caso  $K$ ) en el cual ambos eventos ocurren en puntos diferentes. El intervalo medido donde ambos eventos ocurren en la misma posición se llama intervalo de tiempo propio, y es siempre el menor.

### 6.1.3 Medición de longitudes

Supongamos que se quiere medir la longitud de una regla situada en el sistema  $K$  en forma paralela al eje  $x$ . En el sistema  $K$  la longitud puede obtenerse midiendo con relojes sincronizados el tiempo  $\Delta t$  que transcurre entre el paso de un punto (por ejemplo el origen) de  $K'$  ante cada extremo de la regla, y multiplicando  $\Delta t$  por la velocidad  $V$  con que un sistema se traslada respecto del otro (ver figura 6.3). Así se obtiene:

$$l = V \Delta t \quad (6.6)$$

(Por supuesto, la medición de la longitud de la regla en el sistema  $K$  se puede realizar de manera más sencilla. Sin embargo, para comparar las longitudes en ambos sistemas ( $K$  y  $K'$ ) se requiere utilizar el método que hemos descrito). En el sistema  $K'$  la longitud de la regla puede determinarse midiendo el tiempo  $\Delta t'$  que transcurre entre el paso de ambos extremos ante un reloj situado en un punto (por ejemplo el origen) de  $K'$  (ver figura 6.3) y multiplicando  $\Delta t'$  por la velocidad  $V$ , con lo que se obtiene:

$$l' = V \Delta t' \quad (6.7)$$

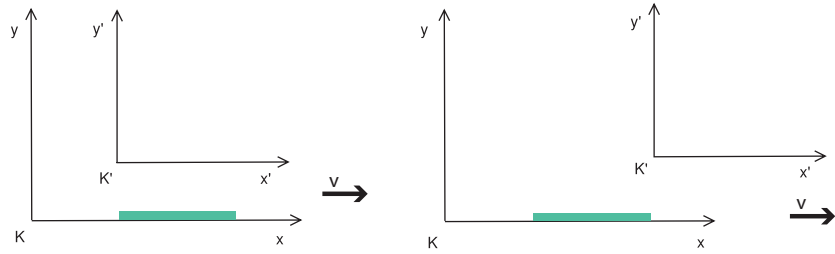
Es claro que es  $l' = l\Delta t'/\Delta t$ ; y usando la expresión 6.5 que relaciona los intervalos de tiempo en ambos sistemas, resulta que:

$$l' = l \sqrt{1 - V^2/c^2} \quad (6.8)$$

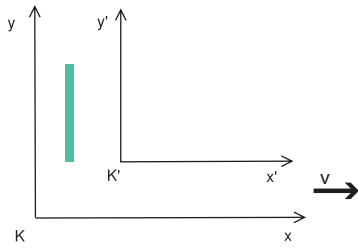
Es decir, que la longitud de un objeto medida en un sistema (en este caso  $K'$ ) respecto del cual está en movimiento es menor que la longitud medida en un sistema (en este caso  $K$ ) respecto del cual está en reposo. La longitud medida en el sistema respecto del cual el cuerpo está en reposo se llama *longitud propia*, y es siempre la mayor.

Observemos que la expresión 6.8 no debe interpretarse diciendo que la regla se "ve" más corta en el sistema  $K'$ , en el sentido que se refiere a la percepción que tiene un observador en dicho sistema. Ver y medir no es lo mismo. Un observador en  $K'$  vería la regla con la





**Figura 6.3.** Medición de la longitud de la regla en el sistema  $K$ . En la figura de la izquierda se mide el tiempo  $t_1$  cuando el origen de  $K'$  pasa por un extremo de la regla, en la figura de la derecha se mide el tiempo  $t_2$  cuando el origen de  $K'$  pasa por el otro extremo. De esta manera:  $\Delta t = t_2 - t_1$ .



**Figura 6.4.** Medición de la longitud de un objeto colocado a lo largo del eje  $y$ , desde un sistema  $K'$  que se mueve con velocidad en el eje  $x$  respecto de  $K$ .

longitud  $l'$  dada por la ecuación 6.8 sólo si las señales que le llegan al mismo tiempo partieron de cada extremo simultáneamente, ya que una longitud es la diferencia entre dos posiciones medidas a un mismo tiempo. Si el observador "mira" cuando el primer extremo pasa ante él, la imagen del otro extremo que percibirá en ese instante corresponderá a la posición en un instante anterior (debido al tiempo que tardan las señales en propagarse) y, por lo tanto, no verá la regla con la longitud  $l'$ , sino con una mayor.

Otra observación importante es que la longitud del objeto que aparece reducida cuando se la mide en el sistema respecto del cual está en movimiento, es la que corresponde a la dirección del movimiento relativo; la longitud en las direcciones perpendiculares al movimiento no se ven modificadas. Si tenemos una regla en el sistema  $K$  colocada a lo largo de su eje  $y$ , la longitud que mide un observador en el sistema  $K'$  que se mueve con velocidad  $V$  en la dirección del eje  $x$  respecto de  $K$  (ver figura 6.4) será  $l' = l$ . En la sección 1.5 se establecen las transformaciones de Lorentz, que son las utilizadas en la teoría de la Relatividad Especial para relacionar las coordenadas medidas respecto de dos sistemas. Veremos entonces, que a partir de estas transformaciones se puede deducir la invariancia de las longitudes transversales a la dirección de movimiento. Es importante resaltar este resultado, ya que en la sección 1.12 de este capítulo será la base que nos permitirá entender el motivo por el cual la geometría en un sistema no inercial es equivalente a una geometría no euclídea.

## 6.1.4 Ejemplos con valores numéricos

La expresión 6.5 nos permite estimar qué tan buena resulta en la práctica la suposición  $\Delta t = \Delta t'$  en la que se basan las transformaciones de Galileo. Veamos algunos ejemplos:

1. Consideremos el movimiento de una nave espacial con una velocidad del orden de la velocidad de escape de la Tierra ( $\approx 11.200$  m/s) (para definición de la velocidad de escape ver el ejercicio propuesto en el capítulo 4 sección 2). Con este valor podemos calcular el cociente  $V/c$  y obtener la proporción en que atrasa un reloj en la nave, respecto de los relojes de un sistema inercial fijo a la Tierra. El resultado es:

$$\frac{V}{c} \approx 1.4 \times 10^{-9} \quad (6.9)$$

Recordemos que lo que queremos estimar es el cociente:

$$\frac{\Delta t'}{\Delta t} = \sqrt{1 - V^2/c^2} \quad (6.10)$$

Para valores pequeños de  $V^2/c^2$  se puede hacer la aproximación <sup>37</sup>:

$$\sqrt{1 - V^2/c^2} \simeq 1 - \frac{V^2}{2c^2} \quad (6.11)$$

de donde resulta:

$$\frac{\Delta t'}{\Delta t} \simeq 1 - 7,1 \times 10^{-10} \quad (6.12)$$

Resulta claro que  $\Delta t'$  es prácticamente igual a  $\Delta t$ . ¿Cuánto tiempo debería transcurrir para que un reloj en la nave atrasara un segundo respecto de relojes sincronizados con los de la Tierra? El cálculo es simple, y da como resultado alrededor de 45 años.

2. Podemos, también, plantearnos la pregunta siguiente: ¿qué velocidad es necesaria para que un reloj atrase, por ejemplo, un segundo cada dos? En este caso es  $\Delta t'/\Delta t = 1/2$  y entonces:

$$\frac{1}{4} = 1 - \frac{V^2}{c^2} \quad (6.13)$$

de donde:

$$V = \frac{\sqrt{3}}{2}c \approx 260.000 \text{ km/s} \quad (6.14)$$

Velocidades tan grandes, si bien escapan a nuestra experiencia cotidiana y son unas 20.000 veces superiores a la de una nave espacial, pueden ser alcanzadas por partículas impulsadas por los campos muy intensos de los llamados *aceleradores de partículas*. Señalemos que todas las mediciones realizadas empleando tales medios confirman las predicciones de la teoría.

<sup>37</sup> Como en otros casos análogos, usamos que para  $\epsilon \ll 1$  vale la aproximación  $(1 - \epsilon)^{1/2} \approx 1 - \epsilon/2$ .

---

## □ Problema 1

---

Supongamos una barra en reposo respecto de un sistema  $K'$ , el cual se traslada con velocidad  $V$  constante respecto de un sistema  $K$ . La longitud propia de la barra es  $l_0 = 9$  m. ¿Cuál debería ser la velocidad de  $K'$  respecto de  $K$  para que un observador en este último sistema midiera una longitud de 8 m?

---

### 6.1.5 Las transformaciones de Lorentz

---

De la hipótesis clásica acerca de la invariancia de tiempos y longitudes se obtienen las transformaciones de Galileo. Sin embargo, estas transformaciones no son consistentes con el hecho de que la velocidad de la luz en vacío es la misma en cualquier sistema de referencia. Por este motivo, Albert Einstein propuso utilizar las *transformaciones de Lorentz* dando lugar a la teoría de la Relatividad especial (ver capítulo 1). En esta teoría, la relación entre las coordenadas espacio-temporales de un cuerpo respecto de dos sistemas  $K$  y  $K'$  que se desplazan uno respecto del otro con una velocidad  $V$  a lo largo del eje  $x$  está dada por:

$$\begin{aligned}t &= \frac{t' + (V/c^2)x'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\x &= \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\y &= y' \\z &= z'\end{aligned}\tag{6.15}$$

Las coordenadas espaciales y el tiempo ya no son independientes. Es claro que para velocidades pequeñas respecto de la de la luz estas fórmulas se reducen a las transformaciones de Galileo: basta con tomar el límite  $V/c \rightarrow 0$ , que equivale a  $c \rightarrow \infty$ . En ese caso se reobtiene  $t = t'$ , es decir, la independencia del tiempo respecto de la elección de sistema de referencia.

Observemos que, como adelantamos, de estas transformaciones se desprende que las distancias perpendiculares a la dirección de  $\vec{v}$  son las mismas en ambos sistemas. La longitud de una regla colocada a lo largo del eje  $y$ , medida desde un sistema que se mueve con velocidad en la dirección del eje  $x$  (ver figura 6.4) es la misma que la que se mide desde un sistema que está en reposo respecto de la regla.

---

### 6.1.6 Adición de velocidades

---

A partir de las ecuaciones 6.15 es sencillo encontrar las fórmulas relativistas para la adición de velocidades, que en el límite no relativista se reducen a la regla galileana  $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$ ;

basta escribir las variaciones de posición y de tiempo:

$$\begin{aligned}\Delta x &= \frac{\Delta x' + V \Delta t'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ \Delta t &= \frac{\Delta t' + (V/c^2)\Delta x'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\end{aligned}\quad (6.16)$$

y calcular las componentes de la velocidad como cocientes de ambos y operar algebraicamente, para obtener:

$$\begin{aligned}v_x &= \frac{v'_x + V}{1 + v'_x V/c^2} \\ v_y &= \frac{v_y \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v'_x V/c^2} \\ v_z &= \frac{v'_z \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v'_x V/c^2}\end{aligned}\quad (6.17)$$

Notemos que, aunque la velocidad  $V$  de un sistema respecto del otro sea paralela al eje  $x$ , para un objeto que se mueva con una velocidad cualquiera las tres componentes de su velocidad cambian al pasar de un sistema a otro. Esto resulta claro a partir de un ejemplo sencillo: consideremos un objeto que se desplaza con una velocidad  $v'$  perpendicular al eje  $x'$ , es decir tal que  $v'_x = 0$ . Como es siempre  $\sqrt{1 - V^2/c^2} < 1$ , tendremos  $v_y < v'_y$ . Esto es esperable pues las distancias medidas perpendicularmente a  $V$  no se modifican al cambiar de sistema, pero los intervalos de tiempo medidos en  $K'$  resultan menores que los intervalos medidos en  $K$ .

---

## 6.1.7 Energía e impulso

---

No deduciremos aquí las expresiones relativistas de la energía y el impulso de una partícula, pero las escribiremos porque de ellas se desprenden conclusiones físicas importantes. La generalización del impulso clásico  $m\vec{v}$  conduce a la definición:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\quad (6.18)$$

que, por supuesto, tiende a la fórmula clásica cuando  $v/c \ll 1$ . La energía toma la forma:

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\quad (6.19)$$

En el caso  $v/c \ll 1$  la raíz en el denominador puede aproximarse haciendo  $(1 - v^2/c^2)^{-1/2} \approx 1 + v^2/(2c^2)$ . Reemplazando en la fórmula precedente resulta que, en el caso de velocidades pequeñas comparadas con la de la luz, la energía puede escribirse como:

$$\varepsilon \simeq mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 \quad (6.20)$$

donde el segundo término es la energía cinética clásica, y el primero representa la *energía en reposo*  $\varepsilon_0 = mc^2$ .

De la expresión relativista de la energía se desprenden dos conclusiones: 1) Aún en reposo, un cuerpo tiene una energía no nula; su magnitud es considerable, dado el valor de la velocidad de la luz. 2) Para que un cuerpo de masa no nula alcanzara la velocidad de la luz se requeriría una energía infinita, pues el denominador de (6.19) se anula cuando  $v = c$ . Entonces, es imposible para un cuerpo masivo alcanzar la velocidad de la luz.

## 6.1.8 Intervalo espacio-temporal

Observemos que, si bien ahora los intervalos temporales ya no son absolutos y tampoco lo son las distancias, de las transformaciones de Lorentz se deduce que la cantidad:

$$s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = c^2\Delta t^2 - (\Delta \vec{r})^2 \quad (6.21)$$

no cambia al pasar de un sistema de referencia inercial a otro. En efecto, basta tomar las expresiones para  $\Delta t$ ,  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  y  $\Delta z$  y reemplazar en la fórmula de  $s^2$  para obtener:

$$c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 \quad (6.22)$$

de manera que:

$$s^2 = s'^2 \quad (6.23)$$

La cantidad  $s$  se denomina *intervalo espacio-temporal*. Su invariancia refleja que, si bien la distancia y el intervalo temporal entre dos eventos son diferentes para distintos sistemas de referencia, existe una combinación de ellos que es independiente del sistema (inercial) considerado.

## 6.1.9 Causalidad

La relatividad predice la imposibilidad de que un cuerpo de masa no nula alcance la velocidad de la luz. Esto permite dar un significado muy importante a la invariancia del intervalo espacio-temporal. Para simplificar el análisis subsiguiente, consideremos eventos que ocurren en una única dimensión espacial, digamos sobre los ejes  $x$  y  $x'$  de dos sistemas  $K$  y  $K'$  que tienen una velocidad relativa paralela a dichos ejes. Entonces, si un evento tiene coordenadas espacio-temporales  $x_1, t_1$  en  $K$  y  $x'_1, t'_1$  en  $K'$ , el siguiente evento tiene coordenadas  $x_2, t_2$  en  $K$  y  $x'_2, t'_2$  en  $K'$ . De la invariancia del intervalo se deduce que:

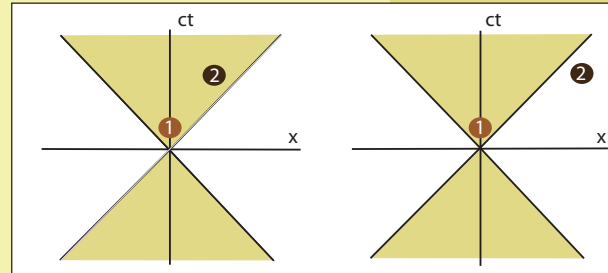
$$s'^2 = c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 = s^2 \quad (6.24)$$

Consideremos ahora los tres casos posibles  $s^2 = 0$ ,  $s^2 < 0$  y  $s^2 > 0$ .

- Si  $s^2 = 0$  entonces  $\Delta x = \pm c\Delta t$ , de modo que un rayo de luz podría conectar al primer evento con el segundo.
- Si  $s^2 > 0$  entonces la distancia que separa ambos eventos es menor que la que recorre un rayo de luz en el tiempo que transcurre entre el primero y el segundo; por lo tanto, incluso un cuerpo masivo, viajando con la velocidad necesaria, podría conectar el primer evento con el segundo.
- Si  $s^2 < 0$  la distancia que separa ambos eventos no puede ser cubierta por ningún cuerpo ni por un rayo de luz en el tiempo que separa al primero del segundo; por lo tanto, es imposible que el segundo evento esté conectado de ninguna forma con el primero.

Es esencial el hecho de que  $s^2 = s'^2$ : la existencia o no de conexión causal entre un evento y el otro no depende del sistema de referencia. Así, si bien los intervalos temporales y las distancias entre ambos eventos dependen del sistema de referencia considerado, la causalidad no es relativa sino absoluta.

En la figura 6.5 se indica el llamado *cono de luz* correspondiente a un evento (1) cuyas coordenadas espacio-temporales se toman como origen. La región sombreada ( $s^2 > 0$ ) corresponde a la región donde posibles eventos (2) están conectados causalmente, mientras que la región sin sombrar ( $s^2 < 0$ ) corresponde a la región donde los eventos (2) no están conectados causalmente. En la figura 6.5 izquierda el evento (2) se encuentra dentro de la región sombreada, mientras que en la figura 6.5 derecha el evento (2) se encuentra por fuera de la región sombreada, es decir, que en este caso los eventos (1) y (2) no están conectados causalmente.



**Figura 6.5.** Conos de luz. Izquierda: Eventos (1) y (2) conectados causalmente. Derecha: Eventos (1) y (2) no conectados causalmente; las líneas oblicuas indican la propagación de un rayo de luz.

## 6.1.10 Ejemplos

1. A lo largo del eje  $x$  del sistema  $K$  se encuentran, separados una distancia  $l_0$ , dos relojes sincronizados a los que llamaremos  $A$  y  $B$ , mientras que sobre el eje  $x'$  del sistema  $K'$ , que se mueve con velocidad  $V$  respecto de  $K$ , se encuentra un reloj al que llamaremos  $C$  (ver figura 6.6). Cuando el reloj  $C$  pasa por delante del reloj  $A$  situado en  $K$ , los dos relojes enfrentados ( $A$  y  $C$ ) indican lo mismo:  $t_1 = t'_1$ . Se quiere calcular entonces cuánto atrasa el reloj  $C$  del sistema  $K'$  cuando pasa enfrente del reloj  $B$  del sistema  $K$ .

Este problema se puede resolver utilizando la invariancia del intervalo espacio-temporal. Tenemos dos eventos:

- el reloj  $C$  pasa por delante del reloj  $A$ .
- el reloj  $C$  pasa por delante del reloj  $B$ .

Elegimos el origen del sistema  $K$  en la posición del reloj  $A$ , y el origen de  $K'$  en la posición del reloj  $C$ . Comenzamos a contar el tiempo, en ambos sistemas, cuando  $C$  pasa frente a  $A$ .

Entonces, las coordenadas espacio-temporales del primer evento son:

$$t_1 = t'_1 = 0 \quad (6.25)$$

$$x_1 = x'_1 = 0 \quad (6.26)$$

Como el sistema  $K'$  se traslada con velocidad  $V$ , el reloj  $C$  pasa frente a  $B$ , ubicado en  $x = l_0$ , cuando en  $K$  ha transcurrido un tiempo  $t_2 - t_1 = t_2 = l_0/V$ . Entonces, las coordenadas del segundo evento son:

$$t_2 = \frac{l_0}{V} \quad t'_2 = ? \quad (6.27)$$

$$x_2 = l_0 \quad x'_2 = 0 \quad (6.28)$$

Tenemos que  $x'_2 = 0$  pues el sistema  $K'$  acompaña al reloj  $C$  (véase la figura 6.6). Utilizamos ahora la propiedad de invariancia del intervalo:

$$s^2 = c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 \quad (6.29)$$

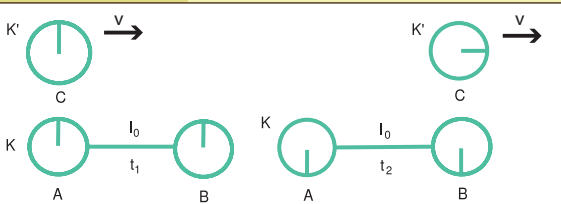
y de aquí se obtiene:

$$c^2 t'^2_2 = c^2 \frac{l_0^2}{V^2} - l_0^2 \quad (6.30)$$

de donde:

$$t'_2 = \frac{l_0}{V} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \quad (6.31)$$

Vemos entonces que, comparando con el tiempo  $t_2$  medido por el observador en  $K$ , el reloj en  $K'$  ha atrasado, ya que  $t'_2$  es menor que  $t_2$  en un factor  $\sqrt{1 - V^2/c^2}$ .



**Figura 6.6.** Relojes sincronizados en el sistema  $K$  se comparan con un reloj en el sistema  $K'$  que se mueve con velocidad  $v$  respecto de  $K$ .

2. Una nave viene hacia la Tierra viajando con una velocidad  $v$ . Una fuente sobre el planeta emite dos pulsos de luz, separados un tiempo  $t_0$  medido en un sistema que está en reposo con respecto de la fuente. Se quiere calcular cuál es el intervalo de tiempo que mide un observador fijo a la nave entre la recepción del primer pulso y el segundo.

También en este caso utilizaremos la invariancia del intervalo relativista para resolver el problema. La figura 6.7 será útil para orientarnos.

Tomemos  $x = -l$  como la posición inicial de la nave, es decir, la que tiene cuando se emite el primer pulso. Elegimos como positivo el sentido en que avanza la nave, y negativo el sentido en que se propagan los pulsos. En un tiempo  $t$  el primer pulso se encuentra en una posición  $x_1(t) = -ct$ , mientras que en ese instante el segundo pulso se encuentra en  $x_2(t) = -c(t - t_0)$ . Llamaremos  $t_1$  al tiempo de encuentro entre el primer pulso y la nave, y  $t_2$  al tiempo de encuentro entre el segundo pulso y la nave; ambos tiempos son medidos desde un sistema fijo a la Tierra.

De acuerdo con la convención adoptada, la ecuación de movimiento de la nave es  $x_N(t) = -l + vt$ . De esta manera la posición del encuentro entre el primer pulso y la nave es  $x_1(t_1) = -ct_1 = x_N(t_1) = -l + vt_1$ , de lo cual inferimos que  $t_1 = l/(c + v)$ . A su vez, la posición del encuentro entre el segundo pulso y la nave es  $x_2(t_2) = -c(t_2 - t_0) = x_N(t_2) = -l + vt_2$ , de lo que se deduce que  $t_2 = (l + ct_0)/(c + v)$ . Por lo tanto:

$$t_2 - t_1 = \frac{ct_0}{c + v} \quad (6.32)$$

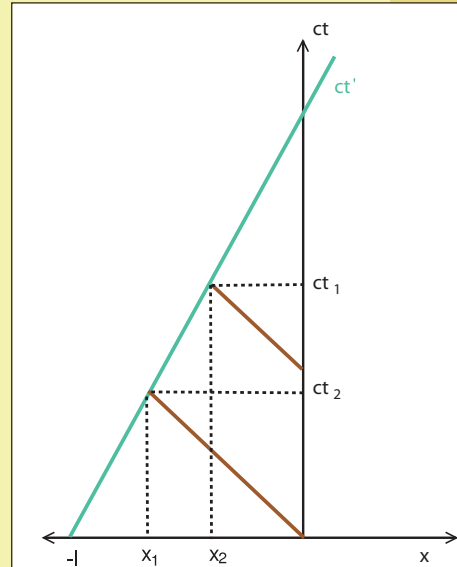
Ahora, utilizamos la invariancia del intervalo relativista. El sistema K es el sistema en reposo respecto de la fuente que emite los pulsos de luz y el sistema K' es el sistema en reposo respecto de un observador que viaja con la nave. Por lo tanto, de la igualdad de los intervalos espacio-temporales se deduce que:

$$c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 \quad (6.33)$$

Dado que en el sistema de la nave ambos eventos (la llegada de cada pulso) ocurren en la misma posición, entonces  $x'_2 = x'_1$ . A su vez,  $x_2(t_2) - x_1(t_1) = -c(t_2 - t_0) + ct_1$ , y utilizando la expresión 6.32 se tiene que  $x_2 - x_1 = (vct_0)/(c+v)$ . De esta manera, obtenemos finalmente:

$$\begin{aligned} t'_2 - t'_1 &= \sqrt{\frac{c^2 t_0^2}{(c + v)^2} - \frac{v^2 t_0^2}{(c + v)^2}} \\ &= t_0 \sqrt{\frac{c - v}{c + v}}. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Esta ecuación muestra que el intervalo temporal entre la llegada de un pulso y el siguiente es *menor* en el sistema de referencia fijo a la nave que en el sistema fijo a la fuente que emita los pulsos.



**Figura 6.7.** En verde,  $x$  (posición) vs  $ct$  (tiempo) de la nave; en marrón,  $x$  vs  $ct$  de los pulsos de luz.

### 6.1.11 Efecto Doppler

El resultado hallado en el ejemplo de los pulsos emitidos hacia la nave corresponde a un movimiento relativo tal que la fuente y el observador se acercan. En general, los intervalos temporales medidos por la fuente ( $\Delta t_F$ ) y el observador ( $\Delta t_O$ ) se relacionan de la forma:

$$\Delta t_O = \Delta t_F \sqrt{\frac{c - v}{c + v}} \quad (6.35)$$



cuando fuente y observador van uno hacia el otro, y de la forma:

$$\Delta t_o = \Delta t_f \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \quad (6.36)$$

cuando fuente y observador se alejan uno del otro. Estas igualdades permiten relacionar las frecuencias medidas en los distintos sistemas de referencia. Sean  $\nu_f$  la frecuencia con que emite la fuente y  $\nu_o$  la frecuencia medida por el observador; entonces, recordando que la frecuencia  $\nu$  es igual a la inversa del período  $\tau$ , tenemos que:

$$\nu_o = \nu_f \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \quad (6.37)$$

cuando fuente y observador se acercan, mientras que:

$$\nu_o = \nu_f \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \quad (6.38)$$

cuando fuente y observador se alejan. Como vemos, en el primer caso la frecuencia medida por el observador es mayor que la de la fuente (corrimiento al azul), en tanto que en el segundo caso la frecuencia medida por el observador es menor que la de la fuente (corrimiento al rojo). Este fenómeno recibe el nombre de efecto Doppler relativista.

---

## 6.1.12 Tiempos y distancias en un disco rotante

---

Consideremos un disco perpendicular al eje  $z$  que rota con velocidad angular  $\Omega$  constante, en torno de dicho eje. Introduzcamos dos sistemas de referencia, uno de los cuales (digamos  $K$ ) es inercial, mientras que el otro (digamos  $K'$ ) gira con la misma velocidad angular constante  $\Omega$ , respecto del eje  $z$  común a ambos sistemas (es decir que  $K'$  es un sistema no inercial).

Supongamos que colocamos dos relojes idénticos sobre el disco, uno de ellos en el centro y otro en el borde del mismo. Ambos relojes están en reposo respecto del disco. Para un observador situado en el sistema  $K$  el reloj en el centro del disco tiene velocidad nula, mientras que el que se encuentra en el borde está en movimiento respecto de  $K$  como consecuencia de la rotación. De acuerdo a lo que hemos visto en la sección 1.2, el reloj en el borde del disco se irá retrasando respecto de sucesivos relojes colocados en  $K$  frente al borde; por lo tanto, *también se irá atrasando respecto del reloj en el centro del disco*, ya que éste no se mueve, y por lo tanto permanece sincronizado con los relojes en  $K$ . Un observador situado en el centro del disco notará que hay una diferencia en la marcha de los relojes en su sistema (el del centro y el del borde). De esta manera, en el disco rotante la medición del tiempo dependerá de la posición del reloj.

Veamos qué ocurre con la medición de longitudes. Un círculo en el plano  $x, y$  del sistema  $K$  (con centro en el origen de coordenadas) se puede considerar también un círculo en el

plano  $x'$ ,  $y'$  en el sistema  $K'$ . Midiendo en  $K$  la longitud y el diámetro de la circunferencia con una regla obtenemos valores cuyo cociente es igual a  $\pi$ , de acuerdo con el carácter euclídeo de la geometría en el sistema de referencia inercial. Supongamos, ahora, que la medida se efectúa con una regla en reposo respecto de  $K'$ . Si se observa este proceso desde el sistema  $K$ , encontramos que la regla tangente a la circunferencia experimenta una contracción en su longitud. Sin embargo, esto no ocurre con la regla ubicada radialmente, es decir la que mide el diámetro. La razón de esto es que el movimiento es siempre perpendicular al radio de la circunferencia y, como se vio en la sección 1.5, cuando se mide una distancia a lo largo de una dirección perpendicular al movimiento entre los dos sistemas, dicha longitud no se ve modificada respecto de la longitud propia. Por lo tanto, concluimos que en el sistema no inercial el cociente entre la longitud de la circunferencia y el diámetro será mayor que  $\pi$  y la geometría de Euclides no vale en dicho sistema.

En la sección 4 del cap. 5 hemos introducido el principio de equivalencia: todo sistema no inercial equivale (localmente) a un campo gravitatorio. De esta manera, en un campo gravitatorio, como ocurre en un disco rotante, no debe ser posible sincronizar relojes que se encuentren en distintas posiciones. Por otra parte, de lo discutido acerca de la medición de longitudes, se infiere que en un campo gravitatorio la geometría ya no debería ser la euclídea con la que estamos acostumbrados a trabajar.

# 7. Geometrías euclídeas y no euclídeas

"... existen incluso ahora, geómetras y filósofos, algunos de ellos ilustrísimos, que dudan de que todo el universo... haya sido creado según la geometría de Euclides, y se atreven incluso a soñar que dos líneas paralelas, las cuales según Euclides, por nada del mundo convergen en la tierra, convergen quizás en algún punto del infinito."

(Ivan Karamazov a su hermano Aliosha, en **Los Hermanos Karamazov, de Fedor Dostoievski (1821-1881)**).



Figura 7.1. Postulado 1.



Figura 7.2. Postulado 2.

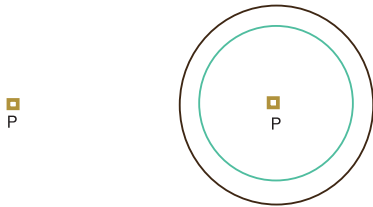


Figura 7.3. Postulado 3.



Figura 7.4. Postulado 4.

## □ 7.1. Geometría euclídea

La intuición desarrollada a partir de la experiencia cotidiana (que no involucra velocidades comparables con la de la luz) está en total acuerdo con la geometría elemental, cuya base son los postulados de Euclides. Euclides fue un matemático griego que vivió entre los años 325 a.C. y 265 a.C. Es posterior a Platón y a Pitágoras, y contemporáneo de Arquímedes y Eratóstenes. Euclides se basó en la lógica de Aristóteles para construir la geometría siguiendo el método axiomático. Los cinco postulados en que se basa la geometría de Euclides son:

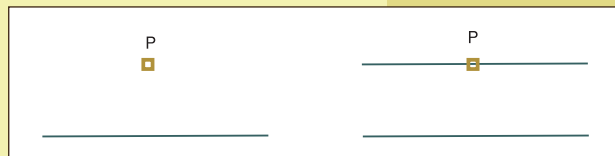
1. Por dos puntos pasa una sola recta.
2. Un segmento rectilíneo puede ser siempre prolongado.
3. Se puede trazar una circunferencia de cualquier tamaño alrededor de un punto dado.
4. Todos los ángulos rectos son iguales.
5. Dada una recta y un punto externo a ella, sólo una recta que pasa por este punto es paralela a la primera.

Estos postulados implican entre otras cosas lo siguiente:

1. Dos rectas paralelas no se cruzan nunca.
2. La suma de los ángulos internos de un triángulo vale  $\pi$  ( $180^\circ$ ).
3. El cociente entre la longitud de una circunferencia y su diámetro es igual a  $\pi$ .

La física clásica no cuestiona estos axiomas y sus consecuencias. Sin embargo, hemos visto en el capítulo 6 sección 1.12 que en los sistemas no inerciales como un

disco rotante, la geometría es no euclídea. El principio de equivalencia establece que un campo gravitatorio puede ser equivalente (al menos localmente) a un sistema no inercial. En consecuencia, debemos esperar que la geometría necesaria para describir los fenómenos en un campo gravitatorio también sea no euclídea.



*Figura 7.5. Postulado 5.*

## □ 7.2. Introducción a las geometrías no euclídeas

Bernhard Riemann (1826-1866) fue un matemático alemán que estudió con el famoso matemático Gauss. En 1854 presentó las bases de una geometría no euclídea llamada geometría elíptica. En esta geometría no se satisface el quinto postulado de Euclides. Por la misma época, el matemático ruso Nikolai Lobachevski (1792-1856) desarrolló una geometría (la geometría hiperbólica) en la cual tampoco se verifica el quinto postulado de Euclides. Tales esfuerzos mostraron que es totalmente posible la existencia de geometrías lógicamente consistentes pero diferentes a la de Euclides. A continuación, daremos una noción de lo que ocurre cuando se trabaja con geometrías que no cumplen algunos de los postulados de Euclides.

Consideremos una superficie esférica de radio  $\rho$  que se halla en un espacio euclídeo tridimensional. Para esta superficie, se debe poder definir una geometría, como generalización de la geometría que se define sobre una superficie plana (en este último caso se trata de una geometría euclídea de dos dimensiones). Si imaginamos construcciones hechas con barras rígidas sobre la superficie, encontraremos que las relaciones geométricas resultantes son diferentes de las que se obtienen en una geometría euclídea de dos dimensiones.

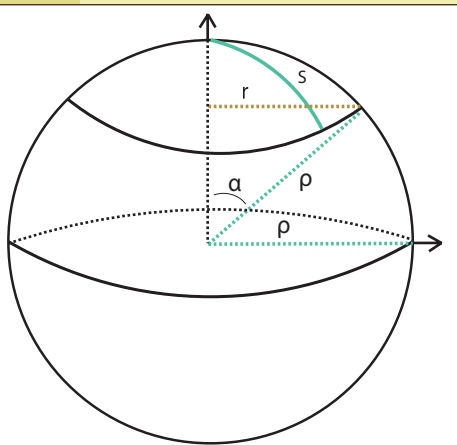
Veamos dos ejemplos:

- Imaginemos una circunferencia sobre la superficie de una esfera de radio  $\rho$ . Si nos movemos en el espacio tridimensional, el radio de dicha circunferencia es  $r$  (ver figura 7.6). Pero si nos restringimos a movernos sobre la superficie de la esfera, el radio medido sobre la misma es  $S$ . Por un lado,  $S = \rho\alpha$ , donde  $\alpha$  es el ángulo desde el "polo" (es decir desde la intersección del eje perpendicular a la circunferencia y la superficie esférica) hasta la circunferencia; a su vez,  $\text{sen } \alpha = r/\rho$ , y por lo tanto,  $r = \rho \text{ sen } \alpha$ . Está claro que la longitud  $L$  de la circunferencia es igual a  $2\pi r$ , pero  $r < S$ . De esta manera, sobre la superficie esférica de radio  $\rho$  el cociente entre la longitud de una circunferencia y su radio es distinto de  $2\pi$ . En efecto, la superficie esférica no es un espacio euclídeo de dos dimensiones y no podemos definir un sistema de coordenadas cartesianas sobre dicha superficie.
- Sobre la misma esfera del ejemplo precedente tracemos el "ecuador", es decir una circunferencia de radio máximo. Entre dicho ecuador y el "polo" (la intersección de la superficie esférica y el eje perpendicular al plano que contiene al ecuador) es posible trazar un triángulo con dos o tres ángulos rectos, de modo que la suma de los ángulos interiores da como resultado más que  $\pi$  (véase la figura 7.7). En efecto, siguiendo dos "meridianos", a partir del ecuador llegamos al polo, y según la separación original de los meridianos en el

ecuador, el ángulo con que se cruzan en el polo puede tomar cualquier valor entre  $0$  y  $2\pi$ . En particular, si se cruzan formando un ángulo de  $\pi/2$ , la suma de los ángulos internos del triángulo formado será igual a  $3\pi/2$ .

Aprovechando los ejemplos precedentes, introduciremos ahora una idea acerca de cómo definir la curvatura de una superficie. Sobre la superficie de un plano marquemos un triángulo equilátero. Supongamos que uno de sus lados, al que llamaremos "base", se encuentra sobre el eje  $x$  de un sistema de coordenadas cartesianas definido sobre el plano. Llamemos  $A$  a uno de los extremos de la base, y  $B$  al otro extremo; nombremos  $C$  al vértice restante. Ahora supongamos que en el punto  $A$  ubicamos un vector  $\vec{V}$  paralelo a la base y apuntando hacia  $B$ . Con dicho vector podemos imaginar la siguiente operación: lo trasladamos, paralelamente a sí mismo, a lo largo del triángulo y comparamos el vector final  $\vec{V}'$  que se tiene al regresar al punto  $A$  con el vector de partida (véase la figura 7.8). Para ello debemos tener claro qué significa "paralelamente a sí mismo". La definición natural es que, si al principio el vector era paralelo a la base, al trasladarlo desde  $A$  hasta  $B$  se lo mantiene paralelo a la misma. En forma totalmente análoga, por lo tanto, al trasladarlo paralelamente a sí mismo desde  $B$  hasta  $C$  se tiene que mantener fijo el ángulo, digamos  $\beta$ , que forma el vector con el lado subtendido entre esos puntos; lo mismo vale, evidentemente, para la traslación desde  $C$  hasta  $A$ . Esto tiene como resultado que el vector  $\vec{V}'$  coincide con el vector de partida  $\vec{V}$ ; en otras palabras, la variación del vector al transportarlo paralelamente a sí mismo lo largo del triángulo es nula.

Consideremos ahora un triángulo trazado sobre una esfera, tal como en los ejemplos recién vistos. Para pensar en un caso concreto, supongamos que el triángulo es equilátero y rectángulo<sup>38</sup>, y se extiende desde el "ecuador" hasta el "polo". Llamemos  $A$  y  $B$  a los dos vértices situados sobre el ecuador, y  $C$  al vértice ubicado en el polo (ver figura 7.9). Tomamos ahora un vector  $\vec{V}$  inicialmente situado en  $A$ , en forma paralela al ecuador, y lo transportamos paralelamente a sí mismo a lo largo del perímetro del triángulo, hasta regresar al punto  $A$ . Para mantenerlo paralelo a sí mismo en el camino de  $A$  a  $B$ , debemos mantenerlo paralelo al ecuador. Al llegar el vector al vértice  $B$ , por ser paralelo al ecuador, forma un ángulo igual a  $\pi/2$  con el lado que va de  $B$  a  $C$ ; por lo tanto, en el siguiente transporte paralelo a lo largo de ese lado, debe mantenerse constante dicho ángulo. Observemos que entonces, al llegar al polo (punto  $C$ ), el vector forma un ángulo nulo (o igual a  $\pi$ ) con el lado que resta recorrer para regresar, es decir con el que va de  $C$  hasta  $A$ . Por lo tanto, en el tercer tramo del transporte paralelo a lo largo del perímetro, el vector debe formar un ángulo nulo con el lado correspondiente; pero entonces, al llegar al punto  $A$ , el vector se ha convertido en  $\vec{V}'$ , que forma un ángulo igual a  $\pi/2$  con  $\vec{V}$  (véase la figura 7.9). En otras palabras, ahora la variación del vector al transportarlo paralelamente a sí mismo



**Figura 7.6.** Cálculo del cociente entre una circunferencia y su radio sobre una superficie curva.

<sup>38</sup>Es decir, sus tres lados son iguales, y sus tres ángulos también son iguales y valen  $\pi/2$ ; tal triángulo es posible si nos movemos sobre una superficie esférica.

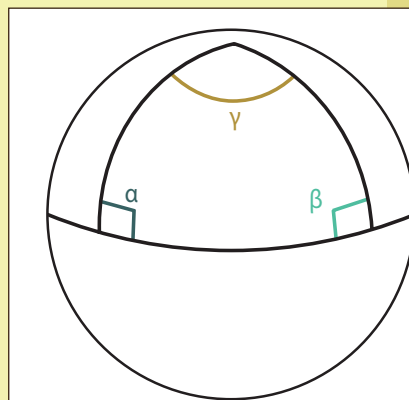
a lo largo del triángulo no es nula. Este resultado, claro está, es consecuencia de que la superficie sobre la cual se realizó el transporte paralelo del vector no es plana.

De esto se desprende una noción natural de curvatura: una superficie es curva cuando la variación de un vector transportado paralelamente a sí mismo a lo largo de una curva cerrada sobre dicha superficie es no nula.

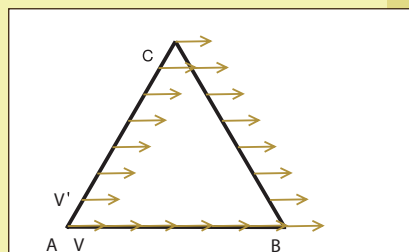
Vayamos un poco más lejos aún, y veamos si se puede decir algo no solamente cualitativo (una superficie es plana o curva), sino también algo cuantitativo (cuándo una superficie curva tiene mayor curvatura que otra superficie también curva). Pensemos en dos esferas de radios  $R_1$  y  $R_2$ ; todos estamos de acuerdo en que la esfera mayor es la de menor curvatura. Consideremos ahora el transporte paralelo a lo largo de triángulos semejantes, uno sobre cada esfera; el mayor de ellos, que corresponde a una menor curvatura, tiene mayor área. La variación del vector será, por cierto, la misma en ambos casos, de modo que dicha variación, que basta para decidir que la superficie es curva y no plana, no basta para identificar cuál superficie tiene mayor curvatura. Pero si definimos de alguna manera un cociente entre la variación de un vector y el área delimitada por la curva sobre la que se realiza el transporte paralelo, sí logramos obtener una forma de cuantificar la curvatura: si la variación del vector es nula, la superficie es plana, mientras que si no lo es, el cociente define qué tanta curvatura tiene.

Existe, por cierto, la manera de formalizar estas ideas, y de extenderlas a conjuntos de puntos de más de dos dimensiones, de modo que se puede hablar, por ejemplo, de la curvatura del espacio tridimensional. El manejo de las herramientas matemáticas (el cálculo tensorial) necesarias para entrar de manera rigurosa en dicho terreno escapa a los objetivos de este libro.

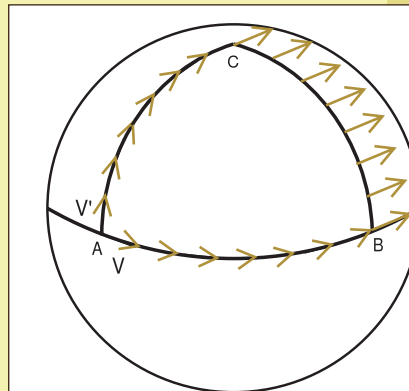
Como hemos adelantado, en una teoría de la gravedad que no soslaye las consecuencias del principio de equivalencia, la geometría del espacio (en realidad, con más precisión, la del espacio-tiempo) debe ser una geometría curva. En efecto, en la teoría de la Relatividad General de Einstein, la geometría del espacio-tiempo es una geometría riemanniana. La luz viaja a lo largo de geodésicas y la curvatura del espacio es función de la distribución y movimiento de la materia que se encuentra en el mismo.



**Figura 7.7.** La suma de ángulos interiores de un triángulo sobre una superficie esférica es mayor a  $\pi$ .



**Figura 7.8.** Transporte paralelo de un vector a lo largo de un triángulo en una superficie plana.



**Figura 7.9.** Transporte paralelo de un vector a lo largo de un triángulo en una superficie esférica.

# 8. La teoría de la relatividad general

## □ 8.1. Bases de la teoría

Lo más usual en las leyes fundamentales de la naturaleza es que la magnitud que determina la intensidad de una interacción no este relacionada con la masa de los cuerpos involucrados. Por ejemplo, en el electromagnetismo la intensidad de la fuerza eléctrica sobre un cuerpo esta dada por el campo que actúa sobre el mismo y por su carga. Como para una dada fuerza la aceleración es inversamente proporcional a la masa, entonces la aceleración de un cuerpo cargado depende tanto de su carga como de su masa. Sólo adquieren aceleraciones iguales, en un campo dado, cuerpos cuya relación carga/masa es la misma. En contraste con los campos electromagnéticos, el campo gravitatorio tiene una propiedad notable: la aceleración que adquiere un cuerpo como consecuencia de la acción del campo gravitatorio no depende de su masa, composición, tamaño o estado físico. Este hecho puede expresarse a su vez de la siguiente manera: en primer lugar, de acuerdo con la ley de Newton se tiene que

$$F = m_i a \quad (8.1)$$

donde  $m_i$  es la masa inercial del cuerpo; la masa inercial, por lo tanto, determina el valor de la aceleración que adquiere el cuerpo para una dada intensidad de la fuerza neta aplicada. A su vez si la aceleración es causada por el campo gravitatorio, la fuerza está dada por

$$F = m_g \times \text{intensidad del campo gravitatorio} \quad (8.2)$$

donde  $m_g$  es la masa gravitatoria del cuerpo; esto es, dicha masa determina la intensidad de la interacción gravitatoria. De este modo se deduce que:

$$a = \frac{m_g}{m_i} \times \text{intensidad del campo gravitatorio} \quad (8.3)$$

y como sabemos que la aceleración es independiente de la naturaleza y composición de los cuerpos, se concluye que el cociente entre masa gravitatoria y masa inercial debe ser igual para cualquier cuerpo. A su vez, con una elección apropiada de unidades, este cociente se puede hacer igual a la unidad. De esta manera podemos concluir que la masa gravitatoria de un cuerpo es igual a su masa inercial. Una manera intuitiva de entender esta propiedad es pensar que la misma cualidad de un cuerpo se manifiesta, de acuerdo con las circunstancias, como medida de su inercia o como medida de su peso.

En 1890 Eötvös propuso un experimento para probar la igualdad entre la masa gravitatoria y la masa inercial. El principio en que se basa el experimento se puede visualizar de la manera siguiente: una masa que se encuentra sobre la superficie de la Tierra va a estar sujeta, para un observador en un sistema no inercial que gira con el planeta, a dos fuerzas: la gravitatoria, dirigida hacia el centro de la Tierra, y la centrífuga, dirigida hacia afuera respecto del eje de rotación. Eötvös utilizó una balanza de torsión en equilibrio respecto del observador y orientada de Este a Oeste. Cualquier pequeña diferencia en la proporcionalidad entre las fuerzas gravitatoria e inercial se traduciría en una rotación de la balanza. Es decir, como la razón de las fuerzas depende de la razón de las masa gravitatoria  $m_g$  a masa inercial  $m_i$ , la aparición de una rotación implicaría que  $m_g$  no sería igual a  $m_i$ . Eötvös demostró que, hasta una parte en mil millones y para todos los materiales usados, se cumplía que  $m_g = m_i$ . Posteriormente, varios científicos (Dicke, Roll, Krotkov, Braginsky, Panov, Keiser, Faller, Alderberg y Heckel) modificaron el experimento original de Eötvös, utilizando aparatos y técnicas de medición muy refinados. Entre 1964 y 1992 el experimento fue realizado nuevamente utilizando masas de distintos materiales. En todos los casos se utilizó la aceleración de caída de dos cuerpos hacia el Sol, y se obtuvo el mismo resultado que el experimento inicial pero con una precisión de una parte en un billón.

La independencia de la aceleración de un cuerpo respecto de su masa conduce, como vimos, al principio de equivalencia. Las consecuencias que se desprenden de dicho principio son notables, y llevan a una reformulación completa de la manera de entender la gravedad. Una forma posible en que pueden seguirse los pasos que conducen a la teoría moderna del campo gravitatorio es la siguiente:

1. La igualdad de aceleraciones, independientemente de las masas de los cuerpos, permite establecer la equivalencia entre campos gravitatorios y sistemas de referencia acelerados (es decir no inerciales).
2. Como se ve, por ejemplo, en el caso del disco rotante, la geometría en un sistema de referencia no inercial no es euclídea. Las relaciones entre distancias no son las de la geometría de Euclides, sino que son como las existentes sobre superficies curvas.
3. Por lo tanto, la equivalencia entre sistemas no inerciales y campos gravitatorios implica que la gravedad debe entenderse como una forma de curvatura.

En el nuevo marco conceptual que surge de estas ideas básicas -la teoría de la relatividad general- la gravedad ya no se entiende como una fuerza. La cuerpos ya no actúan sobre los otros, sino que modifican la geometría del espacio, la cual deja de ser euclídea. Las trayectorias de los otros cuerpos son las de cuerpos moviéndose libremente en un espacio cuya geometría no es plana sino curva. Por otra parte, en este marco conceptual no es válido el principio de superposición utilizado en la subsección 8.3 del capítulo 3 para el cálculo del campo gravitatorio.

No iremos más allá en el desarrollo de estas nociones básicas; en cambio, mostraremos a continuación algunas consecuencias directas del principio de equivalencia que permitirán precisar un poco lo que queremos decir con "curvatura".



## □ 8.2. Consecuencias del principio de equivalencia

### 8.2.1 Deflexión de la luz en un campo gravitatorio

Supongamos un ascensor que se mueve con aceleración constante  $A$  en la dirección que llamaremos vertical, y de sentido "hacia arriba". Definamos un sistema inercial  $K$  respecto del cual se mide la aceleración del ascensor, y otro sistema inercial  $K_1$  que instantáneamente acompaña al ascensor cuando su velocidad es  $V_0$ . Sean  $x, x_1$  los ejes verticales de ambos sistemas, y sean  $y, y_1$  los ejes horizontales de los mismos. Supongamos que cuando la velocidad del ascensor es  $V_0$  desde el exterior se apunta horizontalmente un haz de luz hacia un orificio realizado en una de sus paredes laterales (ver figura 8.1).

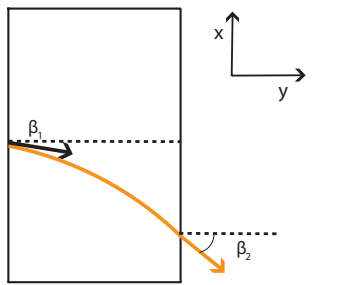


Figura 8.1. Rayo de luz que atraviesa el ascensor.

Si aplicamos las fórmulas (6.17) de transformación de las componentes de la velocidad, tenemos que la velocidad del haz medida desde el sistema  $K_1$  tiene componentes

$$v_{1x} = -V_0, \quad v_{1y} = c\sqrt{1 - \frac{V_0^2}{c^2}} \quad (8.4)$$

Está claro entonces que el valor del ángulo del haz respecto de la horizontal, medido en el sistema  $K_1$ , está dado por

$$\beta_1 = \arcsen\left(\frac{V_0}{c}\right) \quad (8.5)$$

Este ángulo define la dirección con que el haz ingresa al ascensor. Veamos ahora la dirección en que se propaga el haz cuando alcanza la pared opuesta. Para eso basta observar que, en el breve intervalo de tiempo que le lleva al haz alcanzar la pared, el ascensor ha incrementado su velocidad en una cantidad  $dV$ . Este incremento de la velocidad se obtiene de multiplicar la aceleración  $A$  por un tiempo aproximadamente igual<sup>39</sup> a  $L/c$ , donde  $L$  es la separación entre las paredes:  $dV = AL/c$ . Consideremos entonces un tercer sistema inercial  $K_2$  que, precisamente cuando el haz alcanza la segunda pared, se traslada con la velocidad  $V_0 + dV$  que tiene el ascensor en ese instante. Las componentes de la velocidad de la luz en el sistema  $K_2$  son

$$v_{2x} = -(V_0 + dV), \quad v_{2y} = c\sqrt{1 - \frac{(V_0 + dV)^2}{c^2}} \quad (8.6)$$

y por lo tanto ahora el valor del ángulo que la dirección de propagación del haz forma con la horizontal es igual a

<sup>39</sup>Estamos suponiendo que la desviación es en todo momento pequeña, de modo que el tiempo de viaje de pared a pared puede calcularse usando  $c$  en lugar de la componente  $v_x$ ; observemos que esto dejaría de ser válido si  $V_0$  no fuera mucho menor que  $c$ .

$$\beta_2 = \arcsen\left(\frac{V_0 + dV}{c}\right) \quad (8.7)$$

Está claro que estos dos ángulos son diferentes, y que la diferencia se debe a la aceleración del ascensor (en efecto, si es  $A = 0$  también es  $dV = 0$ ). En particular, como los ángulos pueden suponerse pequeños si  $V_0 \ll c$ , entonces  $\beta_1 \approx V_0/c$  y  $\beta_2 \approx (V_0 + dV)/c$ , de modo que la diferencia está dada por

$$\Delta \beta \simeq dV/c = AL/c^2 \quad (8.8)$$

En general, la dirección de propagación del haz va cambiando respecto de sucesivos ejes perpendiculares a la aceleración del ascensor y fijos a sistemas de referencia que acompañan instantáneamente al mismo. En otras palabras, la trayectoria del haz de luz, respecto del ascensor, debe ser una curva. Esto es esperable, pues un sistema de referencia fijo al ascensor está acelerado, y lo que ocurre no es más que lo usual cuando la descripción de una trayectoria "recta" se traduce a un sistema acelerado.

Supongamos ahora que se quiere llevar hasta las últimas consecuencias la equivalencia entre sistemas no inerciales y campos gravitatorios. Entonces si el ascensor no está acelerado, de modo que un sistema de referencia fijo al ascensor es inercial, pero se encuentra inmerso en un campo gravitatorio uniforme y constante de valor  $g = A$ , vertical y de sentido "hacia abajo", debemos esperar que la trayectoria del haz de luz no sea una recta sino una curva; la desviación al atravesar el ascensor de ancho  $L$  en el campo gravitatorio de valor  $g$  debe ser igual a

$$\Delta \beta \simeq gL/c^2 \quad (8.9)$$

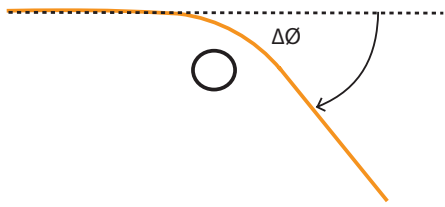
Nuestra conclusión tiene que ser, entonces, que un haz de luz se desvía bajo la acción de un campo gravitatorio. Esto es: la gravedad no solamente actúa sobre los cuerpos masivos, sino que también afecta a la propagación de la luz.

La deflexión de la luz en un campo gravitatorio es una de las predicciones más importantes de la teoría general de la relatividad. Está claro que una predicción tal no puede desprenderse de la forma newtoniana de entender la gravedad como una fuerza entre cuerpos con masa; en cambio, en el marco en que se entiende la gravedad como una curvatura del espacio, resulta una extensión muy natural de la desviación de la trayectoria de un cuerpo debida a la presencia de otro cuerpo masivo. Para un rayo de luz que pasa cerca de un cuerpo esférico de masa  $m'$  de modo tal que su máximo acercamiento se produce cuando alcanza una distancia  $R_0$  a su centro, la teoría de la Relatividad General predice que la trayectoria está contenida en un plano y que la relación entre el ángulo  $\vartheta$  y la distancia al centro  $r$  se obtiene a partir de la siguiente relación entre variaciones infinitesimales <sup>40</sup>:

$$d\vartheta = \frac{dr}{r^2 \sqrt{1/R_0^2 - 1/r^2 + r_0/r^3}} \quad (8.10)$$

---

<sup>40</sup>Aquí admitiremos este resultado sin demostrarlo.



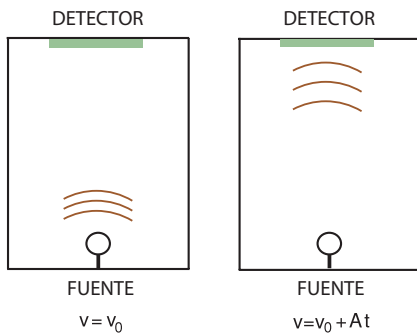
**Figura 8.2.** Desviación de un rayo de luz al pasar por un planeta o una estrella.

donde  $r_0 = 2Gm'/c^2$ . En particular, si se trabaja bajo la hipótesis de un campo gravitatorio débil (como es el caso, por ejemplo, del Sol y los planetas de nuestro sistema) y se comparan las direcciones "entrante" y "saliente" (es decir muy lejos del centro), la predicción de la teoría es una desviación total dada por la fórmula (ver figura 8.2)

$$\Delta\theta = \frac{4Gm'}{c^2 R_0} \quad (8.11)$$

En el caso de un rayo que pasa justo por la superficie del Sol, el cálculo da  $\Delta\theta \approx 1,75''$ . Pocos años después de que Einstein diera a conocer su teoría relativista de la gravedad, las observaciones astronómicas realizadas en 1919 por el grupo de investigadores liderado por Eddington confirmaron, por primera vez, esta predicción de la teoría.

## 8.2.2 Corrimiento al rojo en un campo gravitatorio



**Figura 8.3.** Diferencias en las frecuencias medidas en la fuente y el detector.

Volvamos a la situación del ascensor con aceleración  $A$ , y consideremos el siguiente experimento: una fuente situada en el piso del ascensor emite luz con una frecuencia  $\nu$  y la luz se recibe en el techo, donde se vuelve a medir la frecuencia. La distancia entre el piso y el techo es  $z$ . Respecto de un sistema externo inercial, en el tiempo  $dt$  que la señal tarda en ir del piso al techo la velocidad del ascensor se incrementa en una cantidad  $dV = A dt$ . Dicho incremento de velocidad puede suponerse pequeño comparado con  $c$ , a menos que la aceleración  $A$  o las dimensiones del ascensor sean extremadamente grandes. Por lo tanto es una aproximación razonable considerar que  $c dt = z$ , de modo que  $dt = z/c$  y entonces  $dV = Az/c$ . Observemos ahora que, debido al movimiento acelerado del ascensor, la velocidad relativa entre la fuente luminosa y un observador que mida la frecuencia de la luz recibida en el techo no es cero, sino que

es  $dV$ . Por lo tanto la frecuencia  $\nu_0$  medida por dicho observador difiere de la frecuencia  $\nu_f$  de la fuente, y su relación está dada por la fórmula (6.38) con  $\nu = dV = Az/c$ :

$$\begin{aligned} \nu_0 &= \nu_f \sqrt{\frac{c - Az/c}{c + Az/c}} \\ &= \nu_f \sqrt{\frac{1 - Az/c^2}{1 + Az/c^2}} \end{aligned} \quad (8.12)$$

$$v_o \simeq v_f \left( 1 - \frac{Az}{c^2} \right) \quad (8.13)$$

En el último paso hemos tenido en cuenta que  $dV = Az/c$  es pequeño en comparación con  $c$ , de modo que  $Az/c^2 \ll 1$ ; esto nos permite usar que para  $\varepsilon \ll 1$  se puede aproximar  $(1 + \varepsilon)^{-1} \approx 1 - \varepsilon$ . Como vemos, el resultado expresa que la frecuencia medida por el observador es menor, de modo que la luz aparece corrida al rojo" (efecto Doppler para fuente y observador que se alejan; ver figura 8.3).

Consideremos ahora la situación en la cual el ascensor no está acelerado (un sistema de referencia fijo al mismo es inercial) pero, en cambio, se encuentra en un campo gravitatorio de valor  $g = A$ , vertical y de sentido "hacia abajo". Si se quiere sostener la equivalencia entre un sistema no inercial y un campo gravitatorio entonces es necesario admitir la existencia de un corrimiento al rojo dado por:

$$v_o \simeq v_f \left( 1 - \frac{gz}{c^2} \right) \quad (8.14)$$

de manera que un campo gravitatorio produce un corrimiento de la frecuencia. Si se toma en cuenta que la frecuencia es la inversa del período, entonces hay que concluir que en un campo gravitatorio los intervalos de tiempo medidos en diferentes alturas (en general, en diferentes posiciones que impliquen diferentes valores del potencial gravitatorio) son diferentes. En efecto, recordando que  $gz$  es el potencial gravitatorio  $\Phi$  a una altura  $z$  (tomando como cero la altura  $z = 0$ ) y utilizando de nuevo que  $(1 - \varepsilon)^{-1} \approx 1 + \varepsilon$ , se desprende que los intervalos de tiempo medidos a una altura nula (potencial cero) y a una altura  $z$  (potencial  $\Phi(z) = gz$ ) están relacionados por:

$$\tau(z) \simeq \tau(0) \left( 1 + \frac{\Phi(z)}{c^2} \right) \quad (8.15)$$

(observemos que, para trabajar dentro del mismo grado de aproximación, si al principio supusimos  $dV = Az/c \ll c$ , ahora debemos suponer que  $gz = \Phi(z) \ll c^2$ ). Así, si se tienen dos relojes separados por una altura  $z$  en un campo gravitatorio uniforme (vertical y de sentido "hacia abajo"), el reloj situado más arriba adelanta respecto del situado más abajo. En otras palabras, la escala temporal se ve modificada por la presencia de materia. En tanto se pueda seguir trabajando bajo las mismas aproximaciones, el resultado se puede extender al potencial  $\Phi(r)$  asociado con un campo central. En ese caso es usual tomar el cero del potencial en el infinito, y por lo tanto el potencial se puede expresar como  $\Phi(r) = -Gm'/r$ . Para esta elección del cero del potencial es natural expresar el intervalo temporal transcurrido en un punto donde la coordenada radial toma el valor  $r$  en función del intervalo temporal respectivo a una distancia infinita (donde ya se estableció previamente que el potencial es nulo). Así, se tiene

$$\tau(r) \simeq \tau(\infty) \left( 1 - \frac{Gm'}{c^2 r} \right) \quad (8.16)$$

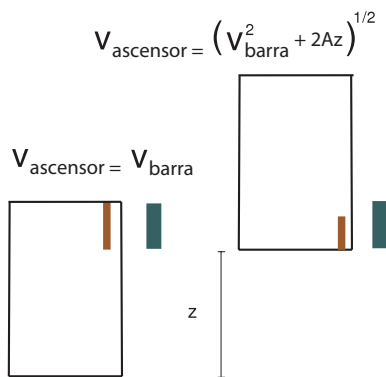
Como el potencial es negativo y su valor absoluto aumenta al disminuir  $r$ , entonces un reloj ubicado más cerca del centro del campo marcha más lentamente que uno más alejado del centro. Esta predicción de la teoría fue confirmada, por primera vez, en el experimento de

Pound y Rebka de 1960, en el cual se midió el corrimiento de frecuencia en el campo gravitatorio de la Tierra.

## 8.2.3 Distancias en un campo gravitatorio

Sigamos con los experimentos pensados en el ascensor con aceleración constante. Imaginemos que a un lado del ascensor que sube con aceleración constante  $A$ , se traslada con velocidad constante  $V$ , en forma paralela, una barra de cierta longitud propia  $l$ . Desde el ascensor la barra se mide sucesivamente dos veces con una regla que tiene la misma longitud propia que la barra (ver figura 8.4):

- La primera medición se realiza con la regla a la altura del techo, cuando la velocidad del ascensor es  $V$ , de modo que la velocidad relativa de la barra respecto del ascensor es cero.
- La segunda medición se realiza con la regla situada a la altura del piso, de modo que pasa frente a la barra después de que el ascensor se ha desplazado una distancia  $z$ , y por lo tanto ha alcanzado una velocidad igual a  $V' = \sqrt{V^2 + 2Az}$ <sup>41</sup>.



**Figura 8.4.** Medida de la longitud de la barra desde el sistema del ascensor; en todos los casos, nos situamos en el sistema donde la barra se encuentra en reposo.

Esto significa que en la segunda medición la velocidad relativa es no nula, y su cuadrado es  $2Az$ . ¿Cómo se relacionan las longitudes medidas en el sistema del ascensor (no inercial) con respectivas longitudes medidas en el sistema en reposo respecto de la barra? Recordemos que en la sección 1.3 del capítulo 6, se da una expresión para las longitudes medidas desde distintos sistema inerciales. ¿Se podrán aplicar dichas expresiones? Veremos que sí pero hay que hacerlo con cuidado. Supongamos ahora que en el momento de realizar la segunda medición nos subimos a un sistema inercial cuya velocidad respecto de la barra es  $\sqrt{2Az}$ . La velocidad de este sistema coincide en ese instante con la del sistema no inercial. Entonces podemos decir que la longitud de la regla  $l_R$  medida en el sistema de la barra está relacionada con su longitud propia (ver sección 1.3 del capítulo 6) de la siguiente manera:

$$l_R = l \sqrt{1 - \frac{2Az}{c^2}} \quad (8.17)$$

Como en el instante de la medición la velocidad relativa de ambos sistemas (el sistema inercial con velocidad  $\sqrt{V^2 + 2Az}$  y el no inercial) respecto del sistema donde la barra se encuentra en reposo es la misma, se puede extender el resultado para el sistema no inercial. Por lo tanto,

<sup>41</sup> Para llegar a la expresión indicada para  $V^2 = V^2 + 2Az$  se utiliza una combinación de las ecuaciones de movimiento para un movimiento uniformemente acelerado:  $V = V + At$  y  $x = Vt + A \frac{t^2}{2}$  (en este caso el movimiento se realiza en la coordenada  $z$  y no en la coordenada  $x$ ).

en el sistema no inercial, la regla se contrae <sup>42</sup> un factor  $\sqrt{1 - \frac{2Az}{c^2}}$ . Entonces, cuando se mide la longitud de la barra con dicha regla en el sistema no inercial, se encontrará que ésta es más larga que en el sistema inercial, de acuerdo con la siguiente relación:

$$l' = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{2Az}{c^2}}} \quad (8.18)$$

donde  $l'$  es la longitud de la barra medida desde el sistema no inercial. De esta manera, en el sistema no inercial, las longitudes medidas a una altura  $z$  respecto del piso del ascensor ( $l$ ) son menores que las distancias medidas sobre el piso del ascensor ( $l'$ ) (ver figura 8.5). Si  $dl(z)$  es una pequeña longitud medida a la altura  $z$  y  $dl(0)$  es una longitud pequeña medida a la altura del piso, se tiene que:

$$\begin{aligned} dl(z) &= dl(0) \sqrt{1 - \frac{2Az}{c^2}} \\ &\simeq dl(0) \left(1 - \frac{Az}{c^2}\right) \end{aligned} \quad (8.19)$$

En el último paso tuvimos en cuenta que seguimos dentro del margen de validez de las aproximaciones de los párrafos anteriores, de modo que  $Az/c^2 \ll 1$ .

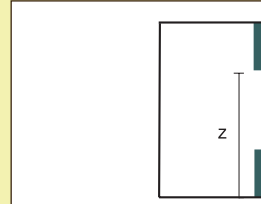
Ahora veamos las consecuencias del principio de equivalencia: si el sistema acelerado fijo al ascensor equivale a un sistema inercial en un campo gravitatorio de valor  $g = A$ , entonces debemos aceptar que la relación entre las longitudes en un campo gravitatorio uniforme y constante es

$$dl(z) \simeq dl(0) \left(1 - \frac{gz}{c^2}\right) \quad (8.20)$$

en tanto se cumpla que  $gz \ll c^2$ . Observemos que las distancias medidas en forma horizontal, en cambio, no deben verse modificadas, ya que están en correspondencia con longitudes perpendiculares a la velocidad relativa en el caso del ascensor. Dado que  $gz$  es el potencial gravitatorio  $\Phi$  a una altura  $z$  correspondiente a elegir el cero del mismo a la altura nula, podríamos escribir

$$dl(z) \simeq dl(0) \left(1 - \frac{\Phi(z)}{c^2}\right) \quad (8.21)$$

Tal como hicimos en el párrafo precedente, si podemos suponer que las aproximaciones realizadas siguen siendo válidas, se puede extender el razonamiento al caso del potencial  $\Phi(r) = -Gm'/r$  de un campo central. La analogía conduce entonces a  $dl(r) \approx dl(\infty) (1 - \Phi(r)/c^2)$ , que relaciona la distancia radial medida a un radio  $r$  donde el potencial es  $\Phi(r)$ , con la distancia medida a una distancia muy grande del centro, donde el potencial se anula. Como  $\Phi$  es negativo y tiende a cero cuando  $r$  tiende a infinito, entonces las distancias radiales medidas más cerca del centro son mayores que las medidas más lejos del mismo. Las longitudes medidas en forma perpendicular a la dirección



**Figura 8.5.** En el sistema no inercial, la primera medición se realiza a una distancia  $z$  del piso del ascensor y la segunda medición se realiza sobre el piso del ascensor.

<sup>42</sup> No vale aquí argumentar que en ambos sistemas (uno fijo a la barra y otro fijo al ascensor) debe medirse que la otra longitud es la que aparece más corta, pues ambos sistemas no son equivalentes: uno es inercial, y el otro no.

radial, claro está, no se modifican, dado que en una dirección tal el potencial gravitatorio no varía.

Precisemos un poco el significado geométrico de esta afirmación: para empezar, notemos que la coordenada radial  $r$  se define de manera natural como la longitud de una circunferencia centrada en el origen, dividida por  $2\pi$ . Por lo tanto, en ausencia de campo gravitatorio  $r$  sería la distancia desde el centro hasta la circunferencia, y  $dr$  sería un pequeño incremento de dicha distancia. Esto implica que cuando el campo gravitatorio es no nulo,  $dr$  coincide con lo que habíamos llamado  $dl(\infty)$ , de modo que en un campo central

$$dl(r) \simeq dr \left( 1 + \frac{Gm'}{c^2 r} \right) \quad (8.22)$$

Esta expresión es válida en tanto se cumpla que  $Gm' \ll c^2 r$ . Las distancias radiales finitas entre dos radios dados se obtienen integrando esta ecuación. Comparemos dos distancias finitas correspondientes a dos diferencias iguales de la coordenada radial, esto es, calculemos las diferencias  $\Delta l$  para  $r_2 - r_1 = \Delta r$  y  $r_4 - r_3 = \Delta r$ , suponiendo  $r_4 > r_3 > r_2 > r_1$ ; el cálculo <sup>43</sup> nos da:

$$\Delta l_{12} \simeq \int_{r_1}^{r_2} dr \left( 1 + \frac{Gm'}{c^2 r} \right) = r_2 - r_1 + \frac{Gm'}{c^2} \ln \frac{r_2}{r_1} = \Delta r + \frac{Gm'}{c^2} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (8.23)$$

$$\Delta l_{34} \simeq \int_{r_3}^{r_4} dr \left( 1 + \frac{Gm'}{c^2 r} \right) = r_4 - r_3 + \frac{Gm'}{c^2} \ln \frac{r_4}{r_3} = \Delta r + \frac{Gm'}{c^2} \ln \frac{r_4}{r_3} \quad (8.24)$$

Vemos que como los cocientes  $r_2/r_1$  y  $r_4/r_3$  son diferentes, las distancias  $\Delta l$  también lo son, a pesar de corresponder a diferencias iguales de la coordenada radial  $r$  (ver figura 8.6). En particular, para la relación  $r_4 > r_3 > r_2 > r_1$ ,  $r_4 - r_3 = r_2 - r_1 = r$  se tiene que  $\ln(r_2/r_1) > \ln(r_4/r_3)$  y por lo tanto  $\Delta l_{12} > \Delta l_{34}$ . En cualquier caso, para cualquier  $r$  finito se tiene que  $\Delta l > \Delta r$ .

### □ 8.3. Desplazamiento del perihelio

La teoría clásica de la gravedad, construida de modo de ser coherente con las observaciones astronómicas disponibles en tiempos de Newton, predice cuatro tipos de trayectorias posibles en un campo gravitatorio central: circunferencias, elipses, parábolas e hipérbolas. De esta manera, los movimientos finitos en un campo tal tienen asociadas trayectorias que son curvas cerradas. El carácter cerrado de las trayectorias ligadas no es, sin embargo, una propiedad general de los campos centrales, sino solamente de algunos de ellos, entre los cuales se encuentra el campo gravitatorio asociado con una energía potencial inversamente proporcional a la distancia al centro. La teoría de Einstein de la gravedad -la relatividad general- no fue construida para explicar ningún dato experimental en particular, pero entre sus muchas predicciones se encuentra la de un desplazamiento del perihelio de la trayectoria de un cuerpo en movimiento en un campo gravitatorio central. Como acabamos de ver, las escalas temporales y espaciales se ven afectadas por la presencia de un cuerpo; tal predicción se desprende, justamente, de cómo la geometría espacio-temporal asociada

<sup>43</sup> Utilizamos que la integral de  $1/x$  es  $\ln x$ .

a un cuerpo esféricamente simétrico determina la trayectoria de otro cuerpo moviéndose alrededor del primero. A continuación estudiaremos en detalle el carácter cerrado o abierto de las trayectorias, las consecuencias de introducir una corrección al campo gravitatorio newtoniano, y el caso particular del desplazamiento del perihelio del planeta Mercurio.

### 8.3.1 Trayectorias abiertas y cerradas en un campo central

Como hemos visto, como consecuencia de la conservación del impulso angular el movimiento de un cuerpo en un campo central se encuentra contenido en un plano; de esta manera, la posición del cuerpo queda determinada por solamente dos coordenadas. Trabajando entonces en las coordenadas polares  $\vartheta$  y  $r$ , a partir de los teoremas de conservación de la energía y del impulso angular hemos demostrado que la relación entre una variación del ángulo  $\vartheta$  y una variación de la distancia  $r$  al centro esta dada por:

$$d\vartheta = \frac{M dr}{r^2 \sqrt{2m(E - U(r)) - M^2/r^2}} \quad (8.25)$$

donde  $m$  es la masa del cuerpo,  $E$  es la energía y  $M$  el valor de su impulso angular.

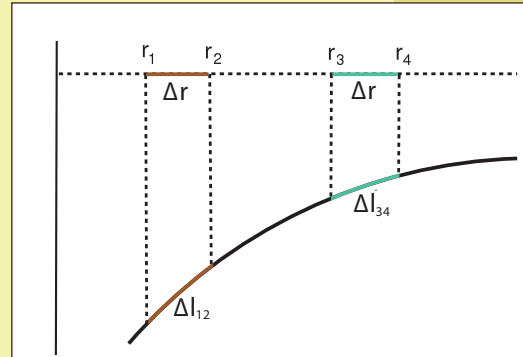
Si la coordenada radial tiene dos límites  $r_{\min}$  y  $r_{\max}$  (tal como ocurre para la energía potencial  $U(r) = -\alpha/r$  cuando  $\alpha > 0$  y  $E < 0$ ), el movimiento es finito y la trayectoria se encuentra contenida en una corona circular de radios interior y exterior  $r_{\min}$  y  $r_{\max}$ . En el tiempo en que el cuerpo va de la distancia mínima a la distancia máxima y de nuevo alcanza la mínima, el vector posición barre un ángulo que se obtiene de integrar la expresión anterior entre los radios correspondientes y multiplicar por 2; de este modo:

$$\Delta\vartheta = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{M dr}{r^2 \sqrt{2m(E - U(r)) - M^2/r^2}} \quad (8.26)$$

La trayectoria es una curva cerrada solamente si después de un cierto número  $n_2$  de idas y vueltas entre  $r_{\min}$  y  $r_{\max}$ , el cuerpo ha realizado  $n_1$  vueltas completas. Esto es equivalente a decir que la relación  $\Delta\vartheta/2\pi$  es un cociente de enteros:

$$\Delta\vartheta/2\pi = n_1/n_2 \quad (8.27)$$

En general, esta condición no se cumple para un campo central cualquiera; sólo se verifica para dos tipos de potenciales:  $U(r) = -\alpha/r$  (asociado al problema de Kepler del movimiento planetario) y  $U(r) = kr^2$  (que corresponde a un oscilador espacial).



**Figura 8.6.** Modificación de las longitudes medidas en la dirección radial.



## 8.3.2 El movimiento real de los planetas

Para un cuerpo sujeto a la acción de un campo gravitatorio asociado a una energía potencial  $U = -\alpha/r$  ya hemos probado que la relación entre la distancia al centro y el ángulo está dada por la expresión

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta} \quad (8.28)$$

donde  $p = M^2/(m)$  y  $e = \sqrt{1 + 2EM^2/(m\alpha^2)}$ . Para  $E \geq 0$  vemos que  $r$  no tiene un límite superior, de modo que el movimiento no está limitado a una región finita del espacio. Pero para  $E < 0$  demostramos que las trayectorias posibles son elipses o circunferencias, de manera que para los movimientos ligados bajo la acción de una fuerza gravitatoria central ya está probado que las trayectorias son curvas cerradas.

Ahora bien: todos los planetas del sistema solar muestran un desplazamiento o corrimiento del perihelio, esto es, al ir de la distancia mínima al Sol (perihelio) a la máxima (afelio) y volver a la mínima, el ángulo que barren no es exactamente igual a  $2\pi$ . Pero, en general, dicho corrimiento es muy pequeño y se explica en el marco de la teoría de Newton (dentro del margen del error con que se realizan las mediciones astronómicas correspondientes) por el hecho de que cada planeta no está bajo la acción de solamente un campo central (el del Sol), sino que además se encuentra sometido a las fuerzas gravitatorias de los demás planetas.

En el caso de Mercurio (el planeta más próximo al Sol), sin embargo, tomar en cuenta esta corrección no condujo a una explicación satisfactoria de lo observado: dentro de la teoría de Newton, aún teniendo en cuenta las fuerzas de los demás planetas, queda sin explicar un corrimiento acumulado de unos  $(43 \pm 0,4)''$  (poco menos de un minuto de grado sexagesimal) por siglo; este corrimiento adicional del perihelio constituye una contrastación negativa de la teoría newtoniana de la gravedad, y su explicación fue durante mucho tiempo un problema abierto de la física.

## 8.3.3 Introducción de una corrección al campo newtoniano

Si a la energía potencial  $U(r) = -\alpha/r$  ( $\alpha > 0$ ) se agrega una corrección<sup>44</sup>  $\delta U(r)$  que no sea de la forma  $1/r$ , la trayectoria de un cuerpo en un movimiento ligado deja de ser cerrada, y en cada vuelta el perihelio o el afelio de la órbita se desplaza un ángulo  $\Delta\vartheta$ .

Para obtener este ángulo en el caso genérico de un corrección central pequeña, partimos de la integral (8.26) donde sustituimos  $U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \delta U(r)$ :

$$\Delta \vartheta = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{M dr}{r^2 \sqrt{2m(E + \alpha/r - \delta U(r)) - M^2/r^2}} \quad (8.29)$$

<sup>44</sup>A una corrección a la energía se la suele llamar también perturbación.

y suponemos que  $\delta U$  es mucho menor que la energía potencial newtoniana:  $\delta U \ll \alpha/r$ ; esta hipótesis es correcta, evidentemente, en el caso del movimiento planetario, y nos permitirá simplificar considerablemente los cálculos. Para comenzar, reescribimos la inversa de la raíz que aparece en la expresión (8.29):

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{2m(E + \alpha/r - \delta U(r)) - M^2/r^2}\right)^{-1} &= \left(2m(E + \alpha/r) - 2m\delta U(r) - M^2/r^2\right)^{-1/2} \\ &= \left(2m(E + \alpha/r) - M^2/r^2\right)^{-1/2} \left(1 - \frac{2m\delta U(r)}{2m(E + \alpha/r) - M^2/r^2}\right)^{-1/2} \end{aligned} \quad (8.30)$$

y en el segundo paréntesis aprovechamos que la perturbación es pequeña para usar la aproximación  $(1 - \varepsilon)^{-1/2} \approx 1 + \varepsilon/2$ , válida para  $|\varepsilon| \ll 1$ ; de este modo:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{2m(E + \alpha/r - \delta U(r)) - M^2/r^2}\right)^{-1} &\simeq \\ &\simeq \left(2m(E + \alpha/r) - M^2/r^2\right)^{-1/2} \left(1 + \frac{m\delta U(r)}{2m(E + \alpha/r) - M^2/r^2}\right) \\ &\simeq \left(2m(E + \alpha/r) - M^2/r^2\right)^{-1/2} + m\delta U(r) \left(2m(E + \alpha/r) - M^2/r^2\right)^{-3/2} \end{aligned} \quad (8.31)$$

Reemplazando ahora esta expresión en la fórmula (8.29) tenemos

$$\Delta \varphi \simeq 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{M dr}{r^2 \sqrt{2m(E + \alpha/r) - M^2/r^2}} + 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{M m \delta U(r) dr}{r^2 \left(\sqrt{2m(E + \alpha/r) - M^2/r^2}\right)^3} \quad (8.32)$$

El primer término del segundo miembro no es más que la cantidad  $\Delta \varphi$  para el caso de la energía potencial newtoniana, de modo que es igual al ángulo  $2\pi$  barrido en una ida y vuelta en el caso no perturbado (es decir con  $\delta U = 0$ ):

$$\Delta \varphi \simeq 2\pi + 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{M m \delta U(r) dr}{r^2 \left(\sqrt{2m(E + \alpha/r) - M^2/r^2}\right)^3} \quad (8.33)$$

El desplazamiento  $\delta \varphi$  debido a la perturbación está dado entonces por el segundo término de esta expresión. Para hacer más sencillas las cuentas es conveniente reescribir la integral como una derivada respecto del valor del impulso angular. De esta manera <sup>45</sup>:

$$\delta \varphi \simeq \frac{\partial}{\partial M} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{2m \delta U(r) dr}{\sqrt{2m(E + \alpha/r) - M^2/r^2}} \quad (8.34)$$

<sup>45</sup> Recordando que  $\frac{d}{dx}(x^{-1/2}) = -x^{-3/2}$  y usando la regla de la cadena, es sencillo verificar que  $\frac{\partial}{\partial M} (2m(E + \alpha/r) - M^2/r^2)^{-1/2} = Mr^2 (2m(E + \alpha/r) - M^2/r^2)^{-3/2}$

La integral se puede ahora escribir de una forma mucho más simple recordando que, para el movimiento no perturbado, la relación entre una variación de la distancia al centro y una variación del ángulo está dada por

$$d\vartheta = \frac{M dr}{r^2 \sqrt{2m(E + \alpha/r) - M^2/r^2}} \quad (8.35)$$

de donde

$$dr = d\vartheta \frac{r^2}{M} \sqrt{2m\left(E + \frac{\alpha}{r}\right) - \frac{M^2}{r^2}} \quad (8.36)$$

Por lo tanto, reemplazando esta expresión para  $dr$  en la ecuación (8.34), y observando que (para el movimiento no perturbado) cuando  $r$  va de  $r_{\min}$  a  $r_{\max}$  el ángulo  $\vartheta$  va de 0 a  $\pi$ , el desplazamiento  $\delta\vartheta$  resulta estar dado por

$$\delta\vartheta \simeq \frac{\partial}{\partial M} \left( \frac{2m}{M} \int_0^\pi r^2 \delta U(r) d\vartheta \right) \quad (8.37)$$

Esta fórmula permite calcular el corrimiento del perihelio para una perturbación asociada a un campo central cualquiera, mientras dicha perturbación se pueda suponer pequeña en comparación con la energía potencial newtoniana.

### 8.3.4 Casos particulares

Consideraremos dos tipos de perturbación al potencial newtoniano: en primer lugar analizaremos una corrección del tipo  $U = \beta/r^2$  (correspondiente a una fuerza adicional inversamente proporcional al cubo de la distancia al centro), la cual se puede resolver de manera muy sencilla. En segundo lugar estudiaremos el caso de una perturbación  $\delta U = \gamma/r^3$  (asociada a una corrección proporcional a  $1/r^4$  en la fuerza), la cual resulta de gran interés físico.

1. Al reemplazar  $\delta U = \beta/r^2$  en la fórmula (8.37) desaparece la dependencia con  $r$  dentro de la integral, la cual resulta trivialmente igual a  $\pi\beta$ . Al derivar  $1/M$  respecto de  $M$  se obtiene  $-1/M^2$ , y por lo tanto el resultado es simplemente:

$$\delta\vartheta \simeq -\frac{2\pi\beta m}{M^2} \quad (8.38)$$

De esta manera, para una corrección de tipo atractivo ( $\beta < 0$ ) el desplazamiento es "hacia adelante", mientras que para una corrección repulsiva ( $\beta > 0$ ) el desplazamiento consiste en un "retardo"; notemos que, en principio, la perturbación se haría menos apreciable cuanto mayor fuera  $M$ , pero esto no sería necesariamente así si  $\beta$  dependiera del impulso angular.

Como el desplazamiento angular  $\delta\vartheta$  es una magnitud adimensional, entonces las dimensiones de  $\beta$  deben ser iguales a las del cuadrado del impulso angular, divididas por las de

la masa; por lo tanto <sup>46</sup>:

$$[\beta] = [M]^2/[m] = [m]^2[v]^2[r]^2/[m] = [m][r]^4=[t]^2.$$

2. Al sustituir  $\delta U = \gamma/r^3$  en la fórmula (8.37) se obtiene

$$\delta \varnothing \simeq \frac{\partial}{\partial M} \left( \frac{2m}{M} \int_0^\pi \frac{\gamma}{r} d\varnothing \right) \quad (8.39)$$

y si utilizamos la relación existente entre  $r$  y  $\varnothing$  para el caso no perturbado, es decir  $p/r = 1 + e \cos \varnothing$ , tenemos

$$\delta \varnothing \simeq \frac{\partial}{\partial M} \left( \frac{2m\gamma}{Mp} \int_0^\pi (1 + e \cos \varnothing) d\varnothing \right) \quad (8.40)$$

Como la integral del coseno de un ángulo entre 0 y  $\pi$  es nula (véase la figura 8.7), queda simplemente

$$\delta \varnothing \simeq \frac{\partial}{\partial M} \left( \frac{2\pi\gamma m}{Mp} \right) \quad (8.41)$$

(notemos que el desplazamiento resulta ser independiente de la excentricidad  $e$ ). Si recordamos que el parámetro se escribe en términos del valor del impulso angular como  $p = M^2/(m\alpha)$ , entonces:

$$\delta \varnothing \simeq \frac{\partial}{\partial M} \left( \frac{2\pi\alpha\gamma m^2}{M^3} \right) \quad (8.42)$$

y al calcular la derivada respecto de  $M$  finalmente obtenemos:

$$\delta \varnothing \simeq - \frac{6\pi\alpha\gamma m^2}{M^4} \quad (8.43)$$

Como  $\alpha > 0$  (pues  $\alpha = Gmm'$  donde  $m'$  es la masa del cuerpo en el centro del campo; en general suponemos  $m \ll m'$  de modo que el cuerpo de masa  $m'$  puede suponerse en reposo) entonces el signo de  $\gamma$  determina que el desplazamiento sea "hacia adelante" o "hacia atrás" respecto del movimiento en un campo puramente newtoniano.

Análogamente a lo mostrado en el caso anterior, las dimensiones de la constante  $\gamma$  pueden deducirse <sup>47</sup> del carácter adimensional del desplazamiento  $\delta\varnothing$ . El resultado es que  $[\gamma] = [m][r]^5/[t]^2$ .

Observemos que, en principio, para constantes  $\beta$  y  $\gamma$  cualesquiera, el movimiento de un cuerpo en un campo gravitatorio podría pasar a depender de su masa. Para mantener la independencia con la masa, tal como se da en el marco de la teoría newtoniana de la gravedad, las correcciones a la energía potencial deberían ser proporcionales a la masa, es

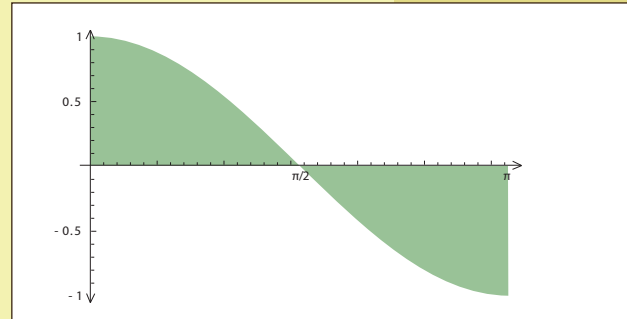


Figura 8.7.

<sup>46</sup> Recordemos que usamos la notación  $[X]$  para las unidades de una magnitud  $X$ .

<sup>47</sup> Por cierto, las dimensiones también pueden inferirse observando que  $\delta U$  debe tener unidades de energía.

decir, en los dos casos considerados deberíamos tener  $\beta \propto m$  y  $\gamma \propto m$ . Naturalmente, de ser así los desplazamientos angulares no dependen de  $m$ : para  $\delta U = \beta/r^2$  la masa  $m$  en el coeficiente conduce a la aparición de  $m^2$  en el numerador, que se cancela con el cuadrado de la masa que aparece en el denominador como resultado de elevar al cuadrado el impulso angular (recordemos que  $M = mr^2\Omega$ ); en forma similar, para  $\delta U = \gamma/r^3$  la masa en el coeficiente conduce, junto con la masa de  $\alpha = Gmm'$ , a la aparición de  $m^4$  en el numerador, que se cancela con la potencia cuarta de  $m$  que resulta de  $M^4$ .

### 8.3.5 La predicción de la teoría de Einstein

Para el movimiento de un planeta en el campo gravitatorio del Sol, la modificación que introduce la teoría de Einstein de la gravitación -la relatividad general- conduce solamente a una corrección pequeña respecto de la teoría de Newton, dado que el campo del Sol es débil y los planetas tienen velocidades mucho menores que la de la luz. En el marco de la teoría clásica la relación entre el ángulo y la distancia al centro se obtiene, como ya hemos visto, de

$$d\phi = \frac{M dr}{r^2 \sqrt{2m(E + \alpha/r) - M^2/r^2}} \quad (8.44)$$

donde  $E = E_0 = mv_0^2/2 + U_0$  y  $\alpha = Gmm'$ . En la relatividad general, a pesar de la forma conceptualmente distinta en que se entiende la gravedad, de todos modos se preserva la existencia de magnitudes conservadas, como el impulso angular y la energía (si bien introduciendo algunas redefiniciones tales que, cuando se consideran velocidades bajas y campos gravitatorios débiles, permiten recuperar las expresiones clásicas). En particular, el movimiento de un cuerpo de masa  $m$  en un campo central sigue estando contenido en un plano, y la trayectoria se obtiene de la relación

$$d\phi = \frac{M dr}{r^2 \sqrt{2m(\tilde{E} + \alpha/r + \gamma/r^3) - M^2/r^2}} \quad (8.45)$$

donde sigue valiendo  $\alpha = Gmm'$ , y las nuevas constantes se definen como

$$\tilde{E} = \frac{\epsilon^2 - (mc^2)^2}{2mc^2} \quad \gamma = -G \frac{m'M^2}{mc^2} \quad (8.46)$$

donde  $c$  es el valor de la velocidad de la luz en el vacío y  $\epsilon$  es la energía relativista del cuerpo de masa  $m$ . Se puede probar que para velocidades y distancias como las que caracterizan el movimiento de los planetas alrededor del Sol, la constante  $\tilde{E}$  es aproximadamente igual a la constante  $E_0$ . Notemos, por otro lado, que, como  $M^2$  es proporcional al cuadrado de la masa  $m$  del cuerpo, entonces  $\gamma$  es proporcional a dicha masa, y de acuerdo con lo discutido en el último párrafo de la sección anterior, la predicción de la teoría de Einstein es que la trayectoria de un cuerpo en un campo gravitatorio sigue siendo independiente de su masa.

La diferencia más importante -la que resulta físicamente más interesante- entre la trayectoria clásica y la que predice la relatividad, es debida a la presencia del término  $2m\gamma/r^3$  dentro de la raíz cuadrada. Si la expresión relativista no incluyera dicho término, tendríamos una relación entre  $d\theta$  y  $dr$  completamente análoga a la clásica, salvo por las diferentes constantes  $\tilde{E}$  y  $E$ . Es claro entonces que la trayectoria cerrada que resultaría de integrar la ecuación (8.45) con  $\gamma = 0$  sería una elipse (o, en particular, una circunferencia); la única diferencia con la trayectoria predicha por la ley de Newton serían los valores de los parámetros de dicha elipse. En particular, sin el término  $2m\gamma/r^3$  el ángulo barrido en una ida y vuelta entre las distancias mínima y máxima al centro seguiría siendo igual a  $2\pi$ . De acuerdo con lo discutido más arriba, esta analogía permite inferir que la inclusión de dicho término debe tener como consecuencia un desplazamiento del perihelio de la órbita y, en tanto la perturbación  $\gamma/r^3$  pueda considerarse pequeña en comparación con  $\alpha/r$ , dicho desplazamiento puede calcularse mediante la fórmula (8.43) de la sección anterior, con  $\gamma$  dado por la teoría de Einstein de la gravitación. Es decir, para hallar el corrimiento del perihelio debemos reemplazar  $\alpha = Gmm'$  y  $\gamma = -Gm'M^2/(mc^2)$  en (8.43), de donde resulta:

$$\delta\theta \simeq \frac{6\pi G^2 m^2 m'^2}{c^2 M^2} \quad (8.47)$$

El resultado, por cierto, es independiente de la masa  $m$ , ya que el cuadrado de la misma en el numerador se cancela con el cuadrado que aparece en el denominador al elevar al cuadrado el impulso angular.

Esta predicción de la teoría relativista de la gravitación puede contrastarse con lo observado. Para el caso de Mercurio el valor numérico que se obtiene para el desplazamiento del perihelio es

$$\delta\theta_{\text{Merc}} \simeq 4,99 \times 10^{-7} \quad (8.48)$$

en una órbita (recordemos que estamos midiendo los ángulos en radianes, de modo que  $\delta\theta$  es adimensional). Teniendo en cuenta que cada órbita de Mercurio alrededor del Sol toma 0,24 años terrestres, se obtiene que el corrimiento acumulado en un siglo es  $100 \delta\theta_{\text{Merc}}/0,24 \approx 2,08 \times 10^{-4}$ . Traducido a segundos de arco (recordando que  $2\pi$  equivale a 360 grados sexagesimales, cada uno de ellos igual a 3.600"), el resultado es de 43" por siglo, en excelente acuerdo con el valor medido, que es, con su error, igual a  $(43,1 \pm 4)''$ .

El acuerdo entre la teoría y la observación resulta aún más notable si se recuerda que Einstein desarrolló la teoría de la relatividad general de manera puramente deductiva, y la misma fue recién a posteriori apoyada por observaciones astronómicas.

---

## □ Problema

---

Determinar el corrimiento del perihelio, acumulado luego de un siglo, para el planeta Tierra. La masa del Sol es de aproximadamente  $2 \times 10^{30}$  kg, y la distancia de la Tierra al Sol es de unos 150 millones de kilómetros.

## □ 8.4. Agujeros negros

Cuando el gas que dará origen a una estrella se comprime, aumenta la temperatura en su interior. A partir de cierto tamaño, la temperatura es tan grande que comienzan a producirse reacciones nucleares; de esta manera comienza a "funcionar" la estrella. Para una estrella ordinaria, se establece un equilibrio entre la gravedad, que tiende a hacerla contraer, y la presión del gas, que tiende a hacer que se expanda. Dicho equilibrio, sin embargo, no es siempre posible: hace ya muchos años, en la década de 1930, se demostró que si la masa  $m$  de la estrella supera la del Sol en dos veces y media o más, la presión del gas no puede equilibrar la atracción gravitatoria. La contracción de la materia que forma la estrella no puede entonces detenerse, sino que la estrella colapsa y continúa -en principio, ilimitadamente- reduciendo su tamaño y aumentando su densidad. Una vez que la estrella se contrae por debajo del llamado radio gravitatorio  $r_g$  o radio de Schwarzschild, cuyo valor está dado por

$$r_g = \frac{2Gm}{c^2} \quad (8.49)$$

la geometría del espacio-tiempo fuera de la masa en contracción adquiere características muy notables <sup>48</sup>. Señalaremos, sin demostración, algunas de ellas.

Como ya hemos visto, los tiempos medidos por observadores situados en distintos radios en un campo gravitatorio central son diferentes. La relación matemática exacta que existe entre el tiempo medido por un observador situado en un punto dado por un valor  $r$  de la coordenada radial y el tiempo medido por uno muy alejado ("en el infinito") es <sup>49</sup>

$$dt^2(r) = dt^2 (1 - r_g/r) \quad (8.50)$$

Por otro lado, ya vimos que la relación entre longitudes medidas en la dirección radial también depende del valor de la coordenada  $r$ . La relación exacta entre las longitudes esta dada por <sup>50</sup>

$$dl^2(r) = \frac{dr^2}{(1 - r_g/r)} \quad (8.51)$$

De estas relaciones se desprende, en particular, que:

1. En el caso de una estrella colapsada la relación entre el tiempo medido por un observador muy lejano y el tiempo medido por un observador que cae hacia el centro se va haciendo cada vez mas grande, tendiendo al infinito cuando el observador que cae alcanza el radio gravitatorio. Para entender esto, supongamos que un astronauta cayera en una nave, y que dicho astronauta hubiera prometido enviar a un observador lejano una señal cada minuto. Tal observador empieza a recibir las señales cada varios

<sup>48</sup> Cuando el radio gravitatorio es mayor que el radio del cuerpo, se dice que la geometría presenta un horizonte de eventos en  $r = r_g$ . En general, el radio gravitatorio de un cuerpo es mucho menor que su radio; por ejemplo, para el Sol se tiene  $r_g \approx 3$  km.

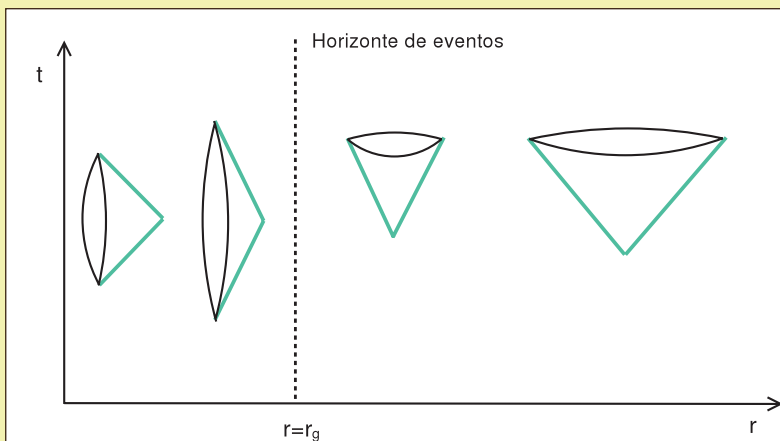
<sup>49</sup> Esta expresión no se corresponde con la obtenido anteriormente al final de la sección 2.2 de este capítulo, porque allí trabajamos bajo la aproximación de un campo gravitatorio débil.

<sup>50</sup> Cabe la misma aclaración anterior respecto de la correspondiente expresión obtenida en la sección 2.3.

minutos, luego cada varias horas, luego años, y finalmente, por mucho que espere, ya nada le llega desde el astronauta. Sin embargo, el astronauta ha cumplido con lo prometido, porque según los relojes situados a bordo de la nave ha seguido enviando una señal cada minuto.

- Los conos de luz, que en ausencia de campo gravitatorio se generaban a partir de rectas a  $45^\circ$  en los diagramas espacio-tiempo (véase sección 1.9 del capítulo 6), exhiben un comportamiento como el que se muestra en la figura 8.8. Como se ve en el esquema, mientras que el tiempo para recorrer un cierto  $\Delta r$  se hace más y más grande al acercarnos desde "afuera" al radio gravitatorio  $r_g = 2Gm/c^2$ , desde "adentro" es imposible alcanzar dicho radio, ya que aún viajando a la velocidad de la luz el futuro de cualquier punto con  $r < r_g$  sólo contiene puntos con valores aún menores de la coordenada radial. Esto significa que ningún cuerpo, ni la luz misma, puede escapar una vez que ha ingresado en la región que se encuentra por debajo del valor del radio gravitatorio.

El segundo aspecto notable que hemos mencionado implica que tales estrellas colapsadas (o, en general, cualquier masa que haya experimentado el colapso gravitatorio descrito) resultan inobservables desde el exterior en forma directa, ya que no reflejan ni emiten luz en ninguna frecuencia. Esto ha llevado a que tales objetos se denominen "agujeros negros". Sin embargo, el hecho de que un agujero negro no emita ni refleje luz no significa que no pueda detectarse: en principio, existen formas indirectas en que su presencia se puede manifestar, como por ejemplo la peculiar emisión de radiación de las partículas que caen hacia el mismo. Al día de hoy parece haber evidencia que sugiere la existencia de agujeros negros incluso en nuestra galaxia. Por ejemplo, en el centro de la misma parece existir un agujero negro de gran masa, estimada en casi 3 millones de veces la masa del Sol.



**Figura 8.8.** Conos de luz para  $r < r_g$  y para  $r > r_g$ . En azul se indica la propagación de un rayo de luz.



# 9. Solución de problemas

## □ Capítulo 2

Solución problema 1:

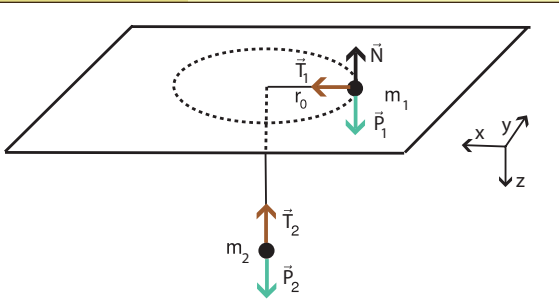


Diagrama de Fuerzas para el problema de dos masas unidas por un hilo que pasa por un orificio en una mesa horizontal.

i) Comencemos por realizar el diagrama de fuerzas sobre cada una de las masas del problema. Para que  $m_2$  esté en reposo, la suma de fuerzas sobre este cuerpo debe ser nula, es decir que el valor de la tensión a la que llamaremos  $\vec{T}_2$  debe ser igual al valor de la fuerza peso sobre la masa  $m_2$ :  $T_2 = m_2 g$ . A su vez, de acuerdo con lo enunciado acerca de la masa del hilo, es una buena aproximación considerar que la misma es nula. Por lo tanto, los módulos de las tensiones sobre los extremos de cada tramo del mismo deben ser iguales, y de esto se desprende que los módulos de las tensiones sobre las masas 1 y 2 son iguales:  $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T$ . Si la masa 2 no se mueve, la masa 1 describe un movimiento circular uniforme con velocidad angular  $v_0/r_0$ . A su vez, para la masa 1 tenemos <sup>51</sup>:

$$-T = m_1 a_c = -m_1 \frac{v_0^2}{r_0}$$

y de esta manera obtenemos la relación que deben cumplir  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $g$ ,  $v_0$  y  $r_0$  para que  $m_2$  permanezca en reposo:

$$v_0^2 = \frac{m_2}{m_1} g r_0$$

ii) Vamos a resolver la siguiente pregunta utilizando las leyes de conservación. El mismo problema puede ser resuelto utilizando simplemente las ecuaciones de Newton, pero veremos que se vuelve más sencillo si utilizamos las leyes de conservación. Veamos en primer lugar la conservación de la energía. Las fuerzas aplicadas sobre  $m_1$  y  $m_2$  en este problema son los pesos, las tensiones sobre ambas masas y la fuerza que la mesa ejerce sobre  $m_1$  que se denomina normal. El peso es una fuerza asociada con una energía potencial, de modo que su trabajo no cambia la energía mecánica, la normal aplicada sobre  $m_1$  no realiza trabajo pues es perpendicular al desplazamiento de  $m_1$ ; no es así, en cambio, para las tensiones. Plantear la conservación de la energía para el sistema requiere entonces cierto cuidado. Si consideramos un desplazamiento infinitesimal  $d\vec{r}$  de la masa 1 sobre el plano, el trabajo infinitesimal sobre  $m_1$  se puede escribir de la siguiente manera:

$$dL_1 = \vec{T}_1 \cdot d\vec{r}_1$$

<sup>51</sup> La suma de fuerzas en la dirección radial es igual a la masa multiplicada por la aceleración centrípeta  $a_c = -v^2/r$

mientras que el trabajo sobre  $m_2$  se puede escribir:

$$dL_2 = \vec{T}_2 \cdot d\vec{r}_2$$

Debido a que el hilo se supone inextensible, necesariamente si  $m_2$  se desplaza una distancia  $dr_2$ , entonces  $m_1$  también se va a desplazar esa distancia:  $dr_1 = dr_2 = dr$ . A su vez, el producto escalar entre la tensión y el desplazamiento infinitesimal de  $m_1$  debe ser positivo, ya que ambos tienen el mismo sentido. Mientras que el producto escalar entre la tensión aplicada sobre  $m_2$  y su desplazamiento debe ser negativo, ya que si  $m_2$  desciende la tensión tiene sentido contrario al desplazamiento. De esta manera tenemos:

$$dL_1 + dL_2 = T dr - T dr = 0$$

y el trabajo total de las tensiones sobre el sistema es nulo, por lo que la energía total se conserva.

Para ver si se conserva el impulso angular, es necesario calcular la suma de los momentos  $\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$  sobre  $m_1$  y  $m_2$ . Para calcular los momentos, tomemos como centro de momentos el orificio sobre la mesa. Las tensiones  $\vec{T}_1$  y  $\vec{T}_2$  son paralelas a los vectores posición  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$  respectivamente, de modo que sus momentos son nulos. La fuerza peso sobre  $m_2$  es colineal con el vector posición de  $m_2$ , y por ello el momento de esta fuerza es nulo. A su vez, el peso sobre  $m_1$  se compensa con la normal  $\vec{N}$  ejercida por la superficie sobre la misma masa; dado que ambas fuerzas se ejercen sobre la misma masa puntual, la suma de momentos sobre  $m_1$  da 0. Por lo tanto, se conserva el impulso angular  $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$  donde  $\vec{M}_1$ ,  $\vec{M}_2$  son los impulsos angulares de  $m_1$  y  $m_2$  respectivamente. Este resultado nos permite utilizar la conservación del impulso angular  $\vec{M}$  y de la energía  $E$  para responder la segunda pregunta del problema. Calculemos el valor de  $\vec{M}$  para un instante cualquiera, con  $v_2 \neq 0$  (recordemos que el impulso angular se calcula tomando el mismo origen para el vector posición  $\vec{r}$  que tomamos al calcular los momentos de las fuerzas). Se puede ver que  $\vec{M}_2 = 0$ , ya que tanto el vector posición  $\vec{r}_2$  como la velocidad  $\vec{v}_2$  está en la dirección de  $z$  y el producto vectorial de dos vectores paralelos es 0. Para calcular  $\vec{M}_1$  vemos que tanto  $\vec{r}_1$  como  $\vec{v}_1$  se encuentran sobre el plano definido por la mesa. Debido a que el producto vectorial siempre es perpendicular al plano definido por los dos vectores, entonces  $\vec{M}_1$  va a estar en la dirección del eje  $z$ . A su vez, se puede ver que  $\vec{r}_1$  va a tener siempre dirección radial, mientras que  $\vec{v}_1$  tiene componente radial  $v_{1r}$  y tangencial  $v_{1t}$ . Al hacer el producto vectorial, la parte correspondiente a la componente radial se anula y sólo queda la parte tangencial, de modo que:

$$M = M_1 = m_1 r v_{1t} = m_1 r_0 v_0$$

La última igualdad en la ecuación anterior es válida ya que  $\vec{M}$  se conserva en todo instante (tenga o no velocidad  $m_2$ ). De esta manera podemos escribir:

$$v_{1t} = \frac{M}{m_1 r} = \frac{r_0 v_0}{r} \quad (a)$$

A continuación calculamos la energía del sistema, en la que tenemos que incluir las energías cinéticas de ambas masas y la energía potencial gravitatoria:

$$E = \frac{1}{2}m_1 (v_{1r}^2 + v_{1t}^2) + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - m_2g(l - r)$$

donde  $l$  es la longitud total del hilo y  $l - r$  es la longitud del hilo desde la mesa hasta  $m_2$ . Si reemplazamos  $v_{1r}$  por su expresión en función de los datos del problema y recordando que  $v_{1r} = v_2$  obtenemos:

$$E = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_2^2 + \frac{1}{2}m_1\frac{r_0^2v_0^2}{r^2} - m_2g(l - r) \quad (b)$$

Es importante notar que la conservación del impulso angular  $\vec{M}$  permite escribir la energía en función de la distancia de  $m_1$  al centro de la mesa, su derivada temporal (la velocidad radial), y los datos iniciales. A su vez, como la energía se conserva, independientemente de si  $m_2$  se mueve o no, podemos escribir el valor de la energía cuando  $v_2 = 0$ :

$$E = \frac{1}{2}m_1v_0^2 - m_2g(l - r_0) \quad (c)$$

Ahora, si queremos obtener el valor de  $v_{1r} = v_2$  cuando  $m_2$  ha bajado una distancia  $d$ , sólo tenemos que reemplazar  $r = l - d$  en la ecuación (b) ( $d$  es la distancia entre la mesa y  $m_2$ ) e igualar esta ecuación con la ecuación (c) para obtener:

$$v_{1r}^2 = \frac{m_1r_0^2v_0^2}{m_1 + m_2} \left( \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{(l - d)^2} \right) - \frac{2m_2g}{m_1 + m_2} (l - r_0 - d)$$

de modo que  $v_{1r} = v_2$  resultan de tomar la raíz. Para obtener el valor de  $v_{1t}$ , evaluamos la ecuación (a) en  $r = l - d$  y obtenemos:

$$v_{1t} = \frac{r_0v_0}{l - d}$$

Como vemos, la conservación del impulso angular tiene como consecuencia que la velocidad tangencial de  $m_1$  aumenta al aumentar  $d$ , pues esto último implica que disminuye la distancia al centro.

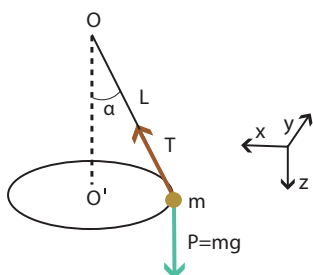


Diagrama de fuerzas para el péndulo cónico.

### Solución problema 2:

Comenzamos por dibujar las fuerzas aplicadas sobre  $m$ , donde también está indicado el sistema de referencia que utilizamos. Si tomamos como centro de momentos el punto  $O$ , entonces el momento de la tensión  $\vec{T}$  sobre la soga es nulo debido a que el vector posición desde ese centro de momentos es paralelo a la dirección de  $\vec{T}$ . El producto vectorial entre la fuerza peso  $\vec{P}$  y el vector posición de  $m$  con origen en  $O$ , se puede escribir siguiendo las reglas para el producto vectorial de la siguiente manera:

$$\vec{r}_O \times m\vec{g} = (-Lm g \sin \alpha, 0, 0)$$

A partir de esta expresión vemos que el impulso angular  $\vec{M}$  desde el punto O no es una cantidad conservada.

Para calcular el momento de las fuerzas externas respecto de O', tenemos que calcular el producto vectorial entre el vector posición de m medido desde O' y las fuerzas tensión  $\vec{T}$  y peso. En este caso el módulo del vector posición es:  $|\vec{r}| = L \cos \alpha$ , y entonces:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{M}}{dt} &= \vec{r}_{O'} \times m\vec{g} + \vec{r}_{O'} \times \vec{T} \\ &= (-L \cos \alpha m g, 0, 0) + (L \cos \alpha T \sin(\pi/2 - \alpha), 0, 0) \\ &= (-L \cos \alpha m g, 0, 0) + (L \cos^2 \alpha T, 0, 0) \\ &= (L \cos \alpha (T \cos \alpha - mg), 0, 0) \end{aligned}$$

Para obtener el valor de la tensión escribimos la ecuación de Newton en el eje z para este sistema:

$$T \cos \alpha - mg = 0$$

de donde  $T = mg/\cos \alpha$ , y por lo tanto  $d\vec{M}/dt = 0$ ; de esta manera, obtenemos que el impulso angular desde el punto O' sí se conserva.

## □ Capítulo 3

Solución problema 1:

La gravedad en la superficie del Sol puede determinarse con la fórmula de ec. 3.30 cap 3  $g = GM_s / R_s^2$ , donde  $M_s$  es la masa del Sol y  $R_s$  su radio. Pero también se puede calcular  $g$  expresando el producto  $GM_s$  en términos de los datos que surgen del movimiento de la Tierra. En efecto, igualando la fuerza gravitatoria del Sol sobre la Tierra con la masa por la aceleración centrípeta de la misma, obtenemos:

$$\frac{GM_s M_T}{r^2} = M_T \frac{v^2}{r}$$

donde  $M_T$  es la masa de la Tierra,  $r$  es el radio de su órbita, y  $v$  es el valor de la velocidad con que recorre la misma. Por lo tanto,  $v = 2\pi r/T$ , donde  $T$  es el período, y así:

$$GM_s = v^2 r = \frac{4\pi^2 r^3}{T^2}$$

Reemplazando ahora en la fórmula para  $g$  tenemos:

$$g = \frac{4\pi^2 r^3}{T^2 R_s^2}$$

de modo que el resultado se obtiene reemplazando  $T = 1 \text{ año} = 365 \times 24 \times 3600 \text{ s} = 3,1536 \times 10^7 \text{ s}$  y  $R_s = 6,95 \times 10^8 \text{ m}$ . El valor de  $g$  en la superficie del Sol resulta así de unos  $277 \text{ m/s}^2$ .

Solución problema 2:

El ángulo se determina a partir de la condición de que ambos cuerpos se encuentren. Tomando  $t_0 = 0$ , las ecuaciones de movimiento de los cuerpos 1 y 2 son:

$$\begin{aligned}x_1 &= v_{0x} t \\y_1 &= v_{0y} t - \frac{g}{2} t^2 \\x_2 &= L \\y_2 &= A - \frac{g}{2} t^2\end{aligned}$$

El encuentro de ambos implica  $x_1 = x_2 = L$ ,  $y_1 = y_2$ . De la primera igualdad se deduce que  $v_{0x} = L/t$ , donde  $t$  es el instante en que se produce el encuentro. Por otro lado, notemos que en la segunda igualdad desaparecen los términos cuadráticos en el tiempo, de modo que  $v_{0y} t = A$ . Por lo tanto,  $\tan \alpha = v_{0y}/v_{0x} = A/L$ , donde  $\alpha$  es el ángulo medido respecto de la horizontal. Así:

$$\alpha = \arctan \frac{A}{L}$$

lo cual quiere decir que el cuerpo 1 debe lanzarse apuntando a la posición inicial del cuerpo 2, tal como sería el caso en ausencia de gravedad. El resultado no es más que una consecuencia de la independencia de la aceleración respecto de la masa.

Solución problema 3:

Coloquemos el origen sobre la superficie y elijamos como eje  $x$  el que es paralelo a la recta que pasa por los centros de las dos esferas. Tomemos el eje  $z$  perpendicular a la superficie. El campo por encima de la superficie es la suma de un campo uniforme más los campos de dos esferas de densidades  $\rho_1$  y  $\rho_2$ , menos los campos de dos esferas de densidad  $\rho$ . Tomando  $x = 0$  en el punto por encima de la mitad del segmento que une los centros de las esferas, el campo total se escribe entonces como:

$$\vec{g}(x, y, z) = (0, 0, -g_0) - \frac{G(\rho_1 - \rho)V_1(x + L/2, y, z + d)}{((x + L/2)^2 + y^2 + (z + d)^2)^{3/2}} - \frac{G(\rho_2 - \rho)V_2(x - L/2, y, z + d)}{((x - L/2)^2 + y^2 + (z + d)^2)^{3/2}}$$

Por lo tanto, justo sobre la superficie  $z = 0$  y a lo largo del eje  $x$  ( $y=0$ ) las componentes cartesianas del campo son:

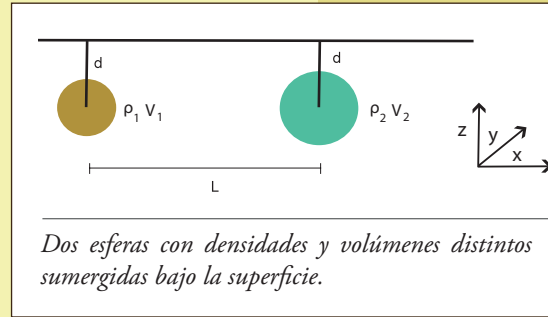
$$\begin{aligned}g_x(x, 0, 0) &= -\frac{G(\rho_1 - \rho)V_1(x + L/2)}{((x + L/2)^2 + d^2)^{3/2}} - \frac{G(\rho_2 - \rho)V_2(x - L/2)}{((x - L/2)^2 + d^2)^{3/2}} \\g_y(x, 0, 0) &= 0\end{aligned}$$

$$g_z(x, 0, 0) = -g_0 - \frac{G(\rho_1 - \rho)V_1 d}{((x + L/2)^2 + d^2)^{3/2}} - \frac{G(\rho_2 - \rho)V_2 d}{((x - L/2)^2 + d^2)^{3/2}}$$

El ángulo  $\gamma$  que forma un péndulo con la dirección vertical es el mismo que el del campo resultante; por lo tanto:

$$\gamma = \arctan \frac{g_x}{g_z}$$

Para las relaciones de densidades dadas, el signo del ángulo estará dado por el signo de la componente  $g_x$ . Está claro que para  $\rho_1 < \rho$  y  $\rho_2 > \rho$  el apartamiento de la vertical debe seguir comportamientos opuestos en las proximidades de cada esfera sumergida.



## □ Capítulo 4

Solución problema 1:

Comencemos por escribir el valor del impulso angular y de la energía en términos de los datos  $v_0$  y  $r_0$ , donde  $r_0$  es igual al radio terrestre más la altura  $A$ . Si la masa del satélite es  $m$ , entonces:

$$M = m r_0 v_0$$

y como la velocidad radial es inicialmente nula, si reemplazamos  $\alpha = Gm'm$  en la expresión de la energía, obtenemos:

$$E = -\frac{Gm'm}{r_0} + \frac{1}{2}mv_0^2$$

donde  $m'$  es la masa de la Tierra. De esta manera, las fórmulas del parámetro  $p$  y la excentricidad  $e$  nos dan

$$p = \frac{1}{Gm'} r_0^2 v_0^2,$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{r_0^2 v_0^2}{G^2 m'^2} \left( v_0^2 - \frac{2Gm'}{r_0} \right)}$$

Observemos dos cosas: 1) el resultado es independiente de la masa del satélite; esto se discute en detalle (cap. 4 - sección 4.2) si el movimiento del satélite es ligado, entonces  $E$  debe ser menor que cero, y de esto se desprende que  $v_0^2/2 < Gm'/r_0$ . Por lo tanto, el paréntesis en la fórmula de la excentricidad es negativo, y se tiene que  $e < 1$ , tal como dedujimos en el análisis general precedente.

Solución problema 2:

La velocidad mínima tal que el cuerpo escapa "al infinito" es la que hace nula la energía. Si bien en general hemos escrito la energía cinética como dos contribuciones asociadas al movimiento radial y al movimiento angular, en este caso particular es conveniente escribir simplemente:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\alpha}{r}$$

donde  $v$  es el valor absoluto del vector velocidad del cuerpo. Reemplazando  $\alpha = Gm'm$  donde  $m'$  es la masa del cuerpo en cuyo campo se mueve el cuerpo en cuestión, igualando  $E = 0$  se obtiene que la velocidad mínima para lograr alejarse ilimitadamente es:

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{2Gm'}{r_0}}$$

donde  $r_0$  es la distancia inicial al centro. Este resultado se conoce como velocidad de escape. Como vemos, la deducción misma nos muestra que el valor es independiente de la dirección de la velocidad. Como ejemplo, calculemos el valor de  $v_{\min}$  para un cuerpo que se encuentra a una distancia del Sol igual a la de la Tierra ( $1,5 \times 10^{11} \text{m}$ ). Para eso utilizamos la masa del Sol  $m' \approx 2 \times 10^{30} \text{kg}$ , y el valor de la constante de la gravitación  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{N m}^2 \text{kg}^{-2}$ . El resultado que se obtiene es, aproximadamente,  $4,2 \times 10^4 \text{m/s}$ . Es interesante, como ejercicio adicional, estimar la velocidad de la Tierra en su órbita alrededor del Sol y compararla con el valor obtenido.

Solución problema 3:

Llamemos  $r_0$  al radio inicial, igual al radio de la Tierra más la altura inicial, y  $r_1$  al radio mínimo admisible (igual, análogamente, al radio terrestre más la altura mínima). Como en las posiciones correspondientes la velocidad es solamente tangencial (pues tanto el radio máximo como el mínimo corresponden a una velocidad radial nula), la conservación de la energía conduce a:

$$v_0^2 - \frac{2Gm'}{r_0} = v_1^2 - \frac{2Gm'}{r_1}$$

de donde:

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2Gm' \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right)}$$

Por otro lado, la conservación del impulso angular implica que:

$$r_0 v_0 = r_1 v_1$$

de donde  $v_1 = r_0 v_0 / r_1$ . Igualando ambas expresiones para  $v_1$  se obtiene una ecuación para el valor de la velocidad inicial, cuya solución es:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2Gm'}{r_0} \left( \frac{r_1}{r_1 + r_0} \right)}$$

Esta es la velocidad mínima requerida para que el satélite no descienda por debajo de  $r_1$ . Reemplazando los valores dados de  $r_0$  y  $r_1$  se obtiene  $v_0 \approx 7.560 \text{m/s}$ . Observemos que, para radios  $r_0$  y  $r_1$  similares,  $v_0$  es apenas menor que  $v = \sqrt{Gm'/r_0}$ , valor que corresponde a la órbita circular para la altura inicial.

#### Solución problema 4:

Está claro que, para que el satélite se mantenga sobre un punto dado de la superficie, el mismo debe moverse en un plano perpendicular al eje de rotación de la Tierra, y con igual velocidad angular que el planeta. Pero dado el carácter central de la fuerza gravitatoria, dicho plano solamente puede ser el del ecuador. Por otro lado, la constancia de la velocidad angular implica, dada la conservación del impulso angular (en particular, del módulo del mismo  $M = mvr = m\Omega r^2$ ), que el radio es constante; esto demuestra que la órbita debe ser circular.

De acuerdo con la discusión de la sección 3, cap. 4, el cubo del radio de la órbita circular es proporcional al cuadrado del período. A partir de la relación entre ambos se obtiene:

$$r = \left( \frac{\alpha T^2}{4\pi^2 m} \right)^{1/3}$$

donde  $m$  es la masa del satélite y  $\alpha = Gm'm$ , con  $m'$  la masa de la Tierra. Así, la masa del satélite se simplifica, y nos queda:

$$r = \left( \frac{Gm'T^2}{4\pi^2} \right)^{1/3}$$

Reemplazando el período  $T = 24$  horas  $= 24 \times 3.600$  s y los valores de  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  Nm<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup> y la masa terrestre  $m' \approx 6 \times 10^{24}$  kg, se obtiene el valor aproximado de  $r = 42.300$  km. La altura sobre la superficie se obtiene restando a este número el radio de la Tierra, de unos 6.400 km. El resultado es de aproximadamente 35.900 km.

#### Solución problema 5:

Usando la fórmula que relaciona el cuadrado del período  $T$  con el cubo del semieje mayor  $a$  se obtiene que  $a = (\alpha T^2 / (4\pi^2 m))^{1/3}$ . Por lo tanto de uno de los datos se obtiene inmediatamente el valor de dicho semieje, que se relaciona con los parámetros buscados de acuerdo con  $a = p / (1 - e^2)$ . Por otro lado, la relación entre la distancia mínima (correspondiente al perigeo) y los parámetros  $e$  y  $p$  es  $r_{\min} = p / (1 + e)$ . El cociente entre estas expresiones nos da

$$\frac{r_{\min}}{a} = 1 - e$$

es decir que

$$e = 1 - \frac{r_{\min}}{a}$$

Sustituyendo esta igualdad en la fórmula de la distancia mínima y resolviendo para obtener  $p$  resulta

$$p = r_{\min} \left( 2 - \frac{r_{\min}}{a} \right)$$

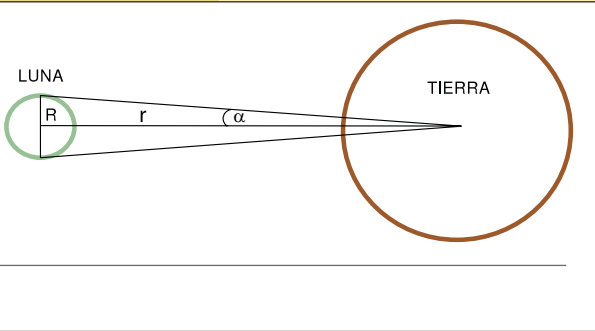
Las dos últimas fórmulas expresan la excentricidad y el parámetro  $p$  en términos del semieje mayor y la distancia mínima de la órbita elíptica. Escribiendo  $a$  en términos del período y



evaluando de acuerdo con los datos:  $T = ((27 \cdot 24) + 8) 3.600 \text{ s}$ ,  $r_{\min} = 3,63 \cdot 10^8 \text{ m}$  obtenemos que  $a = 3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$ , de donde

$$e = 0,055, \quad p = 3,83 \times 10^8 \text{ m}$$

Solución problema 6:



El diámetro angular es dos veces el ángulo que subtiende, medido desde el centro de la Tierra, el radio  $R$  de la Luna. Si lo llamamos  $\alpha$ , está claro que, como el radio lunar es mucho menor que la distancia  $r$  de la misma a la Tierra (o más precisamente a su centro), entonces en radianes se tiene

$$\alpha = \frac{2R}{r}$$

En el perigeo  $r = r_{\min}$ , mientras que en el apogeo  $r = r_{\max}$ , con  $r_{\max} = p/(1 - e)$ . De acuerdo con los resultados del problema anterior, obtenemos que  $r_{\max} = 4,05 \times 10^8 \text{ m}$ . Por lo tanto, haciendo la cuenta y pasando los resultados a grados sexagesimales, resulta que el diámetro angular es de unos  $33'$  (poco más de medio grado) para el perigeo y de unos  $29'$  para el apogeo.

Solución problema 7:

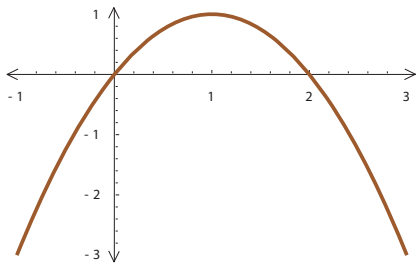


Gráfico de la parábola  $y = 2x - x^2$ .

En efecto, definamos  $x$  como la relación entre  $|\delta M|$  y el valor inicial  $M$ :  $x = |\delta M|/M$ . Entonces, la nueva excentricidad puede escribirse como una función de  $x$ :

$$e' = 2x - x^2$$

Esta función es una parábola con las ramas “hacia abajo” (ver figura), y cuyo máximo se encuentra en  $x = 1$ ; allí se alcanza el valor 1. Pero dada la definición de  $x$ , debemos restringirnos a  $0 \leq x < 1$ , y por lo tanto tenemos que  $e' < 1$ , tal como habíamos afirmado.

Solución problema 8:

i) Para  $\delta M > 0$  podemos escribir la excentricidad como:

$$e' = 2 \frac{\delta M}{M} + \frac{\delta M^2}{M^2}$$

de modo que, definiendo  $x = \delta M/M$ , obtenemos una ecuación cuadrática:

$$x^2 + 2x - e' = 0$$

de la cual resulta:

$$x = \sqrt{1 + e'} - 1$$

A partir de la definición de la variable auxiliar  $x$ , podemos expresar el nuevo impulso angular  $M'$  en términos del impulso original  $M$  y la excentricidad de la trayectoria perturbada:

$$M' = M \sqrt{1 + e'}$$

De la definición de  $M$  tenemos que  $M = mvr_0$  y  $M' = mv'r_0'$ , donde  $m$  es la masa del cuerpo, y  $r_0$  su distancia inicial al centro.  $v$  y  $v'$  son los valores de la velocidad antes y después de la perturbación. Por lo tanto:

$$v' = v \sqrt{1 + e'}$$

de donde se deduce el incremento de velocidad

$$\delta v = v (\sqrt{1 + e'} - 1)$$

ii) En la trayectoria circular original se cumple la igualdad:

$$m \frac{v^2}{r_0} = \frac{\alpha}{r_0^2}$$

donde  $\alpha$  es  $Gm'm$ ; de aquí se obtiene el radio inicial en términos de la velocidad:

$$r_0 = \frac{\alpha}{mv^2}$$

La energía inmediatamente después de la perturbación, cuando se ha modificado la velocidad pero aún no ha cambiado la distancia al centro (recordemos que estamos suponiendo que la perturbación se produce en un tiempo muy corto), se escribe:

$$E' = \frac{1}{2}mv'^2 - \frac{\alpha}{r_0} = \frac{1}{2}m(1 + e')v^2 - \frac{\alpha}{r_0}$$

y reemplazando el valor de  $r_0$  en términos de la velocidad inicial tenemos:

$$E' = \frac{1}{2}mv^2(e' - 1)$$

Por otra parte, dado que la energía se conserva, cuando el cuerpo se aleja a distancias muy grandes del centro y la energía potencial tiende a cero tenemos:

$$E' = \frac{1}{2}mv_\infty^2$$

donde usamos la notación  $v_\infty$  para la velocidad a grandes distancias (en el "infinito"). De aquí se obtiene entonces:

$$v_\infty = v \sqrt{e' - 1}$$

Como  $e' > 1$ , la velocidad es no nula.

## □ Capítulo 5

Solución problema 1:

Sean  $M_A$ ,  $M_N$  y  $M_T$  las masas del astronauta, de la nave y de la Tierra respectivamente, y sean  $r_0$  la distancia de la nave a la Tierra y  $L$  la del astronauta a la nave. Dado que la masa de la nave es mucho mayor, es razonable suponer que la misma se encuentra en equilibrio respecto del sistema no inercial que acompaña su rotación, sin ser apreciablemente afectada por el astronauta. Pero no ocurriría lo mismo, si no contara con el cable. De acuerdo con lo explicado en el párrafo precedente, la fuerza de marea sobre el astronauta, debida a la diferencia entre la gravedad de la Tierra y la fuerza centrífuga es igual a  $3GM_T M_A L / r_0^3$  hacia "afuera". Por otro lado, la fuerza gravitatoria ejercida por la nave sobre el astronauta es igual a  $GM_N M_A / L^2$  hacia "adentro". Por lo tanto, la tensión del cable necesaria para mantener al astronauta en reposo respecto del sistema no inercial es:

$$T = \frac{3GM_T M_A L}{r_0^3} - \frac{GM_N M_A}{L^2}$$

Analicemos si los dos términos de esta expresión son comparables. Por un lado, dados los valores de las distancias tenemos  $L/r_0^3 \sim 10^{-15}(1/L^2)$ ; pero por otro lado,  $M_T \sim 10^{20}M_N$ . Por lo tanto, la fuerza de marea es varios órdenes de magnitud mayor que la de gravedad de la nave sobre el astronauta. Esto permite despreciar esta última fuerza, y así:

$$T \simeq \frac{3GM_T M_A L}{r_0^3} \simeq 2.500 \text{ dynas}$$

Vemos que para las masas y distancias involucradas en este caso, el efecto relevante es el de la fuerza de marea, y no el de la fuerza de gravedad entre la nave y el astronauta.

Solución problema 2:

A partir de los datos y de la relación entre la gravedad superficial y la constante universal de gravitación  $G$  se puede obtener el valor de la masa de la Luna, la cual es de aproximadamente 0,012 veces la masa de la Tierra. De acuerdo con el análisis general realizado, la fuerza de marea  $F_m$  sobre una masa  $dm$  en la superficie lunar es  $3GM dm r_L / r_0^3$ , donde  $M$  es la masa de la Tierra,  $r_0$  es la distancia Tierra-Luna, y  $r_L$  es el radio de la Luna. Por otro lado, la fuerza gravitatoria  $F_L$  de la Luna sobre la masa  $dm$  en su superficie es igual a  $Gm'dm/r_L^2$ , donde  $m'$  es la masa de la Luna y  $r_L$  es su radio. Por lo tanto, el cociente entre ambas fuerzas es igual a:

$$\frac{F_m}{F_L} = 3 \frac{M r_L^3}{m' r_0^3}$$

Entre las masas hay una diferencia de dos órdenes de magnitud. Entre las distancias involucradas la diferencia también es de unos dos órdenes: pero el cociente involucra los cubos de las distancias; por eso el valor del mismo es muy pequeño: aproximadamente igual a  $2,27 \cdot 10^{-5}$ . Entonces, la fuerza de marea debida a la Tierra es, en este caso, mucho

menor que la fuerza gravitatoria de la propia Luna.

---

## □ Capítulo 6

---

Solución problema 1:

La ecuación 6.8 (cap. 6) nos da la relación entre la longitud medida en un sistema y la longitud medida en otro sistema. Invertiendo dicha relación obtenemos la fracción  $V/c$  correspondiente a una relación dada de ambas longitudes:

$$\frac{V}{c} = \sqrt{1 - \frac{l'^2}{l_0^2}}$$

De aquí se obtiene  $V \approx 0,46 c = 138.000 \text{ km/s}$ . Vemos que aún para lograr una diferencia de longitud proporcionalmente no muy grande (una novena parte), la velocidad tiene que ser del orden de  $c$ .

---

## □ Capítulo 8

---

Solución problema 1:

Para calcular el ángulo que se corre el perihelio en una órbita necesitamos determinar el valor del impulso angular. La órbita de la Tierra se aparta poco de una circunferencia, de modo que para el cálculo del impulso angular podemos aproximar la órbita como circular. Esto nos permite determinar la velocidad igualando la fuerza ejercida por el Sol a la masa de la Tierra multiplicada por su aceleración centrípeta. Si  $m'$  y  $m$  son las masas del Sol y de la Tierra,

$$\frac{Gm' m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \quad (8.49)$$

de donde  $v = \sqrt{Gm'/r}$ . Así, escribiendo el impulso angular como  $M = mvr$  tenemos

$$M = m \sqrt{Gm' r} \quad (8.50)$$

Reemplazando en la fórmula para el corrimiento  $\delta\vartheta$  obtenemos

$$\delta\vartheta = \frac{6\pi G m'}{c^2 r} \quad (8.51)$$

Para los valores de masa y radio dados, al multiplicar  $\delta\vartheta$  por cien (el número de órbitas en un siglo) y pasando el resultado a segundos de arco, se obtiene un desplazamiento acumulado de  $3,84''$  (que concuerda, dentro del margen de error observacional, con lo medido). Traducido a distancia, el desplazamiento predicho para la Tierra es de poco más de 9 km en una órbita, o sea poco más de 900 km en un siglo.

---

## Glosario

---

**Afelio.** En la trayectoria de un cuerpo masivo en un campo central generado por otro cuerpo, se llama afelio a la posición correspondiente a la distancia máxima entre los dos cuerpos a lo largo de toda la trayectoria. Por ejemplo, si se trata de la trayectoria de la tierra alrededor del sol, el afelio es la distancia máxima entre la Tierra y el Sol en toda la trayectoria que realiza la Tierra alrededor del Sol.

**Campo central.** Campo de fuerzas donde el valor del potencial en cada punto depende, solamente, de la distancia de ese punto al centro del campo.

**Campo de fuerzas.** Se denomina así al conjunto de los vectores fuerza, correspondientes a cada punto del espacio que se está estudiando.

**Campo estacionario.** Campo de fuerzas que no depende del tiempo. En consecuencia, el trabajo entre dos puntos cualesquiera es independiente del camino de la/s partícula/s del sistema, y la energía mecánica del sistema se conserva.

**Campo invariante ante rotaciones.** Se refiere a que, si rotamos la distribución de masas cuyo campo estamos calculando, el campo tiene la misma expresión que antes de rotarla.

**Colineal.** Paralelo.

**dyna.** En el sistema CGS la unidad de fuerza es la dyna =  $1 \text{ g cm/s}^2$ .

**Eclíptica.** Si marcamos sobre un plano celeste las posiciones ocupadas por el Sol día tras día en el momento de ponerse y unimos dichos puntos, se obtiene una curva regular que se cerrará sobre sí misma al transcurrir un año. Esta curva se denomina eclíptica.

**Efecto doppler.** Diferencia entre la frecuencia de emisión y recepción de una onda de luz o de sonido debido al movimiento relativo entre la fuente y el observador.

**Energía cinética.** Energía que un objeto posee debido a su movimiento. La energía cinética depende de la masa y la velocidad del objeto según la ecuación  $E_c = \frac{1}{2} m v^2$ .

**Energía potencial centrífuga.** Para un campo central, el impulso angular siempre se conserva; esto permite escribir la energía total como en un problema unidimensional donde la coordenada  $x$  es equivalente a la distancia de la partícula al centro del campo. La energía cinética se escribe como un término de energía cinética unidimensional más un término donde aparece el impulso angular: a este término se lo denomina energía potencial centrífuga

**Energía potencial efectiva.** Para un campo central, el impulso angular siempre se conserva; esto permite escribir la energía total como en un problema unidimensional donde la coordenada  $x$  es equivalente a la distancia de la partícula al centro del campo. De esta manera, la energía mecánica total se escribe como un término de energía cinética uni-

dimensional más un término de energía potencial: a este último se lo denomina energía potencial efectiva.

**Ergio.** En el sistema CGS la unidad de energía es el ergio:  $1 \text{ erg} = \text{g cm}^2/\text{s}^2$ .

**Estrellas circumpolares.** Se denomina estrellas circumpolares a aquellas estrellas que por estar muy cerca del polo describen un círculo completo a su alrededor sin cortar el horizonte, por lo que son siempre visibles. Para un observador situado en el Polo Norte son circumpolares todas las estrellas que estén en el hemisferio norte, es decir por "arriba" del ecuador. Para un observador situado en el Ecuador todas las estrellas salen y se ponen, por lo que no hay estrellas circumpolares. Para un observador situado a  $40^\circ$  de latitud norte son circumpolares todas las estrellas que disten menos de  $40^\circ$  del Polo Norte.

**Fuerza restitutiva.** Fuerza que adquiere el sentido opuesto al sentido de desplazamiento del cuerpo.

**Fuerza resultante.** Es el vector resultante de la suma vectorial de todas las fuerzas aplicadas sobre un cuerpo.

**Interferómetro.** Es un instrumento que emplea la interferencia de las ondas de luz para medir con gran precisión longitudes. Hay muchos tipos de interferómetros; en todos ellos se utilizan dos haces de luz que recorren dos trayectorias ópticas distintas, determinadas por un sistema de espejos y placas que, finalmente, convergen para formar un patrón de interferencia.

**Invarianza de la velocidad de la luz.** Con esta expresión nos referimos a que, si medimos el valor de la velocidad de la luz en cualquier sistema inercial, debemos obtener el mismo resultado.

**Joule.** En el sistema MKS la unidad de energía es el Joule:  $1 \text{ J} = \text{kg m}^2/\text{s}^2$ .

**Ley de inercia.** Todo cuerpo continúa en su estado de reposo o movimiento uniforme y rectilíneo, mientras que la sumatoria de fuerzas ejercidas sobre el mismo sea nula.

**Movimiento ligado.** Movimiento que se realiza en una región finita del espacio.

**Newton.** En el sistema MKS la unidad de fuerza es el Newton;  $1 \text{ N} = \text{kg m}/\text{s}^2$ .

**Perihelio.** En la trayectoria de un cuerpo masivo en un campo central generado por otro cuerpo, se llama perihelio a la posición correspondiente a la distancia mínima entre los dos cuerpos a lo largo de toda la trayectoria. Por ejemplo, si se trata de la trayectoria de la tierra alrededor del sol, el perihelio es la distancia mínima entre la tierra y el sol en toda la trayectoria que realiza la tierra alrededor del sol.

**Puntos límites** (o puntos de retorno). Se dice de aquellos puntos donde la energía potencial efectiva es igual a la energía mecánica total de la partícula.

**Retrogradación de los planetas.** Si observamos los planetas desde la tierra varias noches consecutivas, veremos que ellos realizan un movimiento general hacia el este. Sin embargo, en determinados momentos de su trayectoria cambian de sentido y se mueven hacia el oeste: este último movimiento es lo que se denomina retrogradación de los planetas.

**Sistema de referencia inercial.** Sistema de referencia donde se cumplen las leyes de Newton.

**Sistema epiciclo-deferente.** Elemento geométrico compuesto de dos circunferencias que se utilizaba en el sistema astronómico de Ptolomeo para explicar las variaciones de velocidad y dirección del movimiento aparente de los planetas. En el sistema ptolemaico, los planetas se mueven sobre un círculo pequeño denominado epiciclo cuyo centro se desliza sobre otro círculo mayor denominado deferente (ver figura 1.3). Ambos círculos se mueven hacia el este y son paralelos a la órbita del sol sobre el plano celeste (eclíptica).

**Velocidad areolar.** Es el cociente entre el área barrida y el tiempo empleado.

---

## Bibliografía

---

- Einstein, A y Infeld, L. La Física, Aventura del Pensamiento. Ed. Losada. 1995.
- Einstein, Albert. Relativity, the special and the general theory. Crown Publishers Inc New York, 1961.
- Ferraro, Rafael. El Espacio-Tiempo de Einstein. Ediciones Cooperativas. 2005.
- Galileo Galilei. Diálogos Acerca de Dos Nuevas Ciencias. Ed. Planeta Planeta-De Agostini. Barcelona. 1996.
- Landau, L, Ajjezer, A y Lifshitz E.M. Curso de Física General. Editorial Mir. Moscú 1988.
- Kuhn. La Revolución Copernicana. Editorial Planeta. 1993.
- Landau, L y Kitaigorodski, A. Física para Todos. Ed. Mir. Moscú. 1973.
- Landau, L. y Lifshitz E. M. Mecánica Clásica. Ed. Reverté. Barcelona. 1991.
- Levinas, Marcelo Leonardo. Las Imágenes del Universo. Fondo de Cultura Económica. 1996.





**Susana Landau**

Doctora en Astronomía



**Claudio Simeone**

Doctor en Física

**"Gravitación"**. Es un libro introductorio a las teorías modernas de gravitación, desde la Física de Galileo y Newton, hasta la Relatividad General propuesta por Albert Einstein. Se establecen las bases de la teoría newtoniana y se proponen y resuelven ejercicios de aplicación en el marco de esta teoría. Se familiariza al lector con los conceptos de dilatación de tiempo y espacio de la Relatividad Especial, y se introducen las nociones básicas de geometrías no euclidianas. Finalmente, se dan las bases de la teoría de Relatividad General. Se describen algunas aplicaciones de la misma como la corrección a la órbita de Mercurio, el corrimiento al rojo, los cambios de longitudes en la teoría de la Relatividad General y agujeros negros.

